Binormalenflächen mit einer zur Striktionslinie äquidistanten Asymptotenlinie in Beziehung zu Evoluten Ribaucourscher Kurven.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen Philosophischen Fakultät der Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

vorgelegt von

Otto Weber
aus Albersroda (Kr. Querfurt)

Halle a. d. S. — 1914.
Hofbuchdruckerei von
C. A. Kaemmerer & Co.

Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. **A. Gutzmer.**

Meinen lieben Eltern!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546024_0029

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 7

I. Kapitel. Schraubenlinien, auf deren Binormalenflächen eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert 11

§ 1. Aufstellung der Gleichungen und Verlauf der Schraubenlinien 11

§ 2. Untersuchung der Binormalenfläche 16

a) Gleichungen der Haupttangentenkurven . . 16

b) Verhalten der Fläche wie eine Minimalfläche längs der ausgezeichneten Asymptotenlinie . 19

§ 3. Untersuchung der Haupttangentenkurve . . . 20

a) Nachweis, daß sie geodätische Linie auf der Böschungsfläche der Schraubenlinien ist . . 20

b) einige Beziehungen zur Schraubenlinie . . . 22

c) Verbiegung aus einer ebenen Kurve . . . 24

§ 4. Zylinder der ausgezeichneten Haupttangentenkurve 27

§ 5. Polarfläche der Schraubenlinien 29

II. Kapitel. Kegelgeodätische, auf deren Binormalenfläche eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert 31

§ 1. Aufstellung der Gleichungen 31

§ 2. Der Exponent k in der Gleichung $y = As^k$ . . 36

§ 3. Evoluten der Ribaucourschen Kurven 37

Seite

§ 4. Ebene Kurven, aus denen sich die Kegelgeodätischen verbiegen 39
a) elementare Fälle 39
Gemeine Zykloide 40
Astroide 42
Neilsche Parabel und Evolute der Kettenlinie 44
b) Fälle, die auf elliptische Integrale führen . 45
§ 5. Die aus den betrachteten ebenen Kurven entstehenden Kegelgeodätischen 54
§ 6. Behandlung zweier Spezialfälle von Evoluten Ribaucourscher Kurven 56

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit, zu der ich die Anregung erhielt von meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geh. Regierungsrat Professor Dr. A. Gutzmer, im Verein mit Herrn Professor Dr. E. Salkowski, beschäftige ich mich mit Kurven, auf deren Binormalenflächen eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert. Diesem Problem widmet Herr Professor Dr. Salkowski einen Abschnitt in seiner Arbeit[1]) »Zum Biegungsproblem der Regelflächen«. Er kommt mit Hilfe der synthetischen Methode zu dem allgemein gültigen Ergebnis, daß die Gratlinie der rektifizierenden Fläche derjenigen Kurven, auf deren Binormalenfläche eben eine derartig ausgezeichnete Haupttangentenkurve existiert, notwendig dieselbe rektifizierende Fläche hat, wie die Kurve selbst. Dieses Resultat wird dann angewandt auf die Schraubenlinien. Es zeigt sich, daß diese durch Biegung, bei der die Tangenten geradlinig bleiben, aus der Traktrix entstehen. Dieses Resultat wird dann noch analytisch bestätigt.

Das I. Kapitel vorliegender Dissertation ist als eine Fortsetzung der genannten Arbeit zu betrachten. Nachdem nochmals kurz hergeleitet wird, daß die gesuchten Schraubenlinien durch einen Biegungsprozeß aus der Traktrix hervorgehen, werden dann deren Gleichungen sowie ihren Verlauf im Raume bestimmt. Es zeigt sich, daß die Schraubenlinien geodätisch liegen auf einem Zylinder, dessen Schnitt mit der

1) Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Vereinigung XXII, 1. Abt. Heft 3/4.

xy-Ebene eine Pseudotraktrix ist, und daß diese Schraubenlinien sich asymptotisch derjenigen eines Rotationszylinders nähern. Der nächste Paragraph handelt von der Binormalenfläche der Schraubenlinien. Es wird analytisch gezeigt, daß tatsächlich eine Haupttangentenkurve auf dieser Fläche im konstanten Abstand von der Striktionslinie verläuft. Die weitere Untersuchung ist der ausgezeichneten Asymptotenlinie gewidmet. Nachdem einige kleinere Sätze über diese sowie deren Beziehungen zur Schraubenlinie hergeleitet sind, wird die Haupttangentenkurve als geodätische Linie auf der Böschungsfläche der Schraubenlinie bestimmt und durch einen Biegungsprozeß aus einer ebenen Kurve gewonnen. Diese ebene Kurve stellt sich hinsichtlich ihrer natürlichen Gleichung als eine Verallgemeinerung der Kettenlinie gleichen Widerstandes dar; ein Resultat,[1]) das Loria an der Hand einer Arbeit von Cifarelli[2]) beweist. Hier wird jedoch mittelst der natürlichen Geometrie gezeigt, daß diese Kurve dieselben geometrischen Eigenschaften hat wie die Kettenlinie selbst und auch deren Verlauf aufweist mit Ausnahme, daß sie weniger steil ansteigt. Eine geometrische wie auch analytische Untersuchung des Zylinders, auf dem die ausgezeichnete Haupttangentenkurve liegt, zeigt, daß dessen Schnitt mit der xy-Ebene eine Äquitangentialkurve der Pseudotraktrix ist. Die Aufstellung der Gleichungen für die Polarfläche und deren geodätischen Linien beschließt dieses Kapitel.

Das II. Kapitel stellt eine Verallgemeinerung des Problems dar. Es wird nach den Kegelgeodätischen gesucht, auf deren Binormalenfläche eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie sich befindet. Die Aufstellung der Gleichungen für die ebenen Kurven, aus denen die Kegelgeodätischen durch einen Biegungsprozeß entstehen, führt uns auf Kurven, bei

1) Gino Loria, Spezielle ebene Kurven, Theorie u. Geschichte Leipzig 1902 Seite 581.

2) Cifarelli, Sopra una classe di curve intrinsecamente analoghe alla catenaria di equale resistenza (Giorn. di Matem. XXXVI 1898).

denen die eine Koordinate gleich einer Potenz des Bogens ist, also auf die Evoluten[1]) Ribaucourscher Kurven. Dabei springt ein Satz heraus, nämlich, daß die Länge der Tangente, gemessen bis zu einer festen Achse, proportional der Bogenlänge ist. Diese Evoluten sind wiederholt Gegenstand von Spezialuntersuchungen gewesen, Jedoch berücksichtigen die älteren Arbeiten[2]) von Tortolini, M. Cantor, Fleischer, Nies nur Fälle, die elementare Integrationen gestatten. Erst die Arbeit von Müller dehnt die Untersuchung auch auf Fälle mit elliptischen Integralen aus. Allerdings beschränkt er sich in der Gleichung $y = As^k$ auf Werte von k, die größer sind als eins. Er begründet dies damit, daß die anderen Kurven wegen einer neu einzuführenden Bogenlänge nicht zu dieser Klasse gehören. Bei den elliptischen Fällen unterläßt Müller die Diskussion der Kurven. Die von ihm allgemein gegebene Diskussion mittelst der Tangentenrichtung im ersten Quadranten genügt nicht, um sich eine Vorstellung von dem Verlauf der Kurven zu machen, da die bei der Integration der anderen Koordinate auftretenden periodischen Funktionen den Verlauf wesentlich beeinflussen, wie man schon bei den einfachen Fällen der gemeinen Zykloide und Astroide erkennt.

In vorliegender Arbeit wird nochmals auf diese Kurvenklasse eingegangen. Nachdem die Einschränkung von Müller inbezug auf den Exponenten k als willkürlich und nicht in der Problemstellung begründet nachgewiesen ist, wird gezeigt, daß für die Verbiegung zur Kegelgeodätischen nur die Kurven in Betracht kommen, bei denen $k > 0$ ist. Im nächsten Para-

---

1) Gino Loria, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1902 Seite 601. H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Sammlung Schubert, Leipzig 1908 Seite 392.

2) Tortolini, Journ. f. Mathem. 26, 1843, 288—310.
H. Cantor, Diss. Frankfurt a. M. 1851.
C. R. Fleischer, Progr. Grimma, 1849.
C. Nies, Progr. Darmstadt, 1887.
R. Müller, Progr. Berlin, 1889.

graphen werden die Evoluten Ribaucourscher Kurven direkt aus der Definition letzterer Kurvenklasse hergeleitet, ein Weg, der wesentlich verschieden ist von dem, den Cesàro[1]) in seiner Arbeit »Sur une note de géométrie infinitésimale« einschlägt. Im 4. Paragraphen werden dann zunächst die bekannteren elementaren Fälle behandelt hauptsächlich hinsichtlich ihrer Verbiegung. Für die gemeine Zykloide und Astroide wird eine sehr kurze Herleitung aus der natürlichen Gleichung gegeben, alsdann analytisch die Gerade bestimmt, die sich zur Haupttangentenkurve verbiegt. Für die Neilsche Parabel und die Evolute der Kettenlinie werden die Biegungsverhältnisse nur geometrisch untersucht. Obgleich für die nächsten zwei elliptischen Fälle schon eine Darstellung in der Weierstraßschen $\wp$-Funktion gegeben ist, so wird ihnen noch eine eingehende Untersuchung gewidmet, um die Gestalt und den Verlauf der Kurven genau kennen zu lernen. Alsdann sind die Kegelgeodätischen und ihr Zylinder soweit behandelt, wie es mit geometrischen Hilfsmitteln möglich ist. Es zeigt sich hierbei, daß die Kegelgeodätischen nicht immer den regulären Verlauf aufzuweisen brauchen, wie ihn Schauff[2]) in seiner Dissertation festgestellt hat. Die Geodätischen, die aus der Neilschen Parabel und der Evolute der Kettenlinie entstehen, lassen den Scheitel, sowie einen Ast vermissen, so daß die Geodätische nur einen ins Unendliche gehenden Zweig aufweist. Der letzte Paragraph gehört im eigentlichen Sinne nicht zu dem behandelten Problem. Der Vollständigkeit halber und wegen des allgemeinen Interesses, das die Ribaucourschen Kurven und ihre Evoluten beanspruchen, sind von den ∞^1 elliptischen Fällen noch 2 weitere untersucht.

---

1) Nouvelles Annales de math. (3) 13, 1894.

2) Schauff, Über die geodätischen Linien des Kegels. Dissertation Münster 1906.

I. Kapitel.

Schraubenlinien, auf deren Binormalenflächen eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert.

§ 1. Aufstellung der Gleichungen und Verlauf der Schraubenlinien.

Die analytische Darstellung der Kurven, auf deren Binormalenflächen eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert, ergibt sich aus den Forderungen, daß ihre Binormalen mit den Hauptnormalen einer zweiten Kurve zusammenfallen, und daß entsprechende Punkte beider Kurven konstanten Abstand — gemessen auf den Hauptnormalen der zweiten Kurve — voneinander haben. Die natürliche Gleichung[1]) dieser Kurvenklasse lautet:

$$(1.) \qquad (\varrho^2 + h^2) - h\,\varrho'\,r = 0,$$

wo ϱ den Torsionsradius, r den Krümmungsradius, h den konstanten Abstand bezeichnet.

Zur Bestimmung der in dieser Kurvenklasse enthaltenen Schraubenlinien hat man in Gleichung (1)

1) Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Vereinigung XXII, 1. Abt., Seite 66.

$$r = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\vartheta}$$

einzusetzen. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\vartheta\,(\varrho^2 + h^2) - h\,\varrho\,\varrho' = 0. \tag{2.}$$

Die Gleichung wird gelöst durch den Ansatz:

$$\varrho = h\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} \tag{3.}$$

Es ist dann

$$r = h\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1}. \tag{4.}$$

Letztere Gleichung stimmt mit der natürlichen Gleichung einer Traktrix überein, und da für diese Kurve die Länge der Tangente, gemessen vom Berührungspunkt bis zur Leitlinie der Traktrix, konstant ist, so erhält man den schon bekannten Satz:[1])

Biegt man die Ebene einer Traktrix so, daß die Tangenten geradlinig bleiben, zu einer Böschungsfläche, so liegt auf der Binormalenfläche der entstehenden Schraubenlinie eine Asymptotenlinie im konstanten Abstand von der Striktionslinie. Diese Kurve geht bei der Biegung aus der Leitlinie der Traktrix hervor.

Schraubenlinien, von denen die Krümmung $\frac{1}{r}$ und die Torsion $\frac{1}{\varrho}$ als Funktionen der Bogenlänge s gegeben sind, stellen sich dar durch die Gleichungen:[2])

---

1) Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Vereinigung XXII 1. Abt., Seite 65.

2) Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. Leipzig 1910, §§ 13 und 14.

$$x = \int_0^s \frac{(p^2 - \pi^2) - (q^2 - \varkappa^2)}{2(p\varkappa - q\pi)}\, ds$$

(5.)
$$y = \int_0^s \frac{(p^2 - \pi^2) + (q^2 - \varkappa^2)}{2(p\varkappa - q\pi)}\, ds$$

$$z = \int_0^s \frac{\pi\varkappa - qp}{p\varkappa - q\pi}\, ds,$$

wo

$$p = b\, e^{i\int \frac{ds}{\varrho}}, \quad q = a\, e^{i\int \frac{ds}{\varrho}}, \quad \pi = e^{i\int \frac{ds}{\varrho}}, \quad \varkappa = e^{i\int \frac{ds}{\varrho}}$$

ist, und a und b der quadratischen Gleichung:

(6.)
$$1 - 2\frac{\varrho}{r}u - u^2 = 0$$

genügen. Die Größen a und b berechnen sich zu

$$a = -\frac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta}, \qquad b = \frac{1-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Weiter ist

$$\int \frac{ds}{\varrho} = \frac{1}{h}\int \frac{ds}{\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}} = \mathrm{cotg}\,\vartheta \cdot \mathrm{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}.$$

Es gelten nun die Gleichungen:

(7.)
$$p = \frac{1-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\, e^{\frac{i}{2}\cdot\frac{1-\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}}$$

$$q = -\frac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\, e^{-\frac{i}{2}\frac{1+\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\mathrm{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}}$$

$$\pi = e^{\frac{i}{2}\cdot\frac{1-\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\mathrm{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}}$$

$$\varkappa = e^{-\frac{i}{2}\cdot\frac{1+\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\mathrm{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}}$$

Die Gleichungen der Schraubenlinien lauten:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta(\sin\vartheta - 1)\int_0^s e^{\frac{i}{\sin\vartheta}\cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}\,ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta(\sin\vartheta + 1)\int_0^s e^{-\frac{i}{\sin\vartheta}\cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}\,ds \\
y &= \frac{i}{2}\operatorname{tg}\vartheta(\sin\vartheta - 1)\int_0^s e^{\frac{i}{\sin\vartheta}\cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}\,ds \\
&\quad +\frac{i}{2}\operatorname{tg}\vartheta(\sin\vartheta + 1)\int_0^s e^{-\frac{i}{\sin\vartheta}\cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}\,ds \\
z &= s\cdot\cos\vartheta.
\end{aligned}
\tag{8.}
$$

Mit Rücksicht auf die Relationen:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

formen sich die Gleichungen (8) um zu

$$
\begin{aligned}
x &= -\operatorname{tg}\vartheta\int_0^s \cos\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}{\sin\vartheta}\right]ds \\
&\quad + i\operatorname{tg}\vartheta\cdot\sin\vartheta\int_0^s \sin\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}{\sin\vartheta}\right]ds \\
y &= \operatorname{tg}\vartheta\int_0^s \sin\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}{\sin\vartheta}\right]ds \\
&\quad + i\operatorname{tg}\vartheta\cdot\sin\vartheta\int_0^s \cos\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}{\sin\vartheta}\right]ds \\
z &= s\cdot\cos\vartheta.
\end{aligned}
\tag{9.}
$$

Eine einfache Drehung des Koordinatensystems führt die Gleichungen in folgende Form über:

$$x = -\sin\vartheta \int_0^s \cos\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}{\sin\vartheta}\right] ds$$

(10.)

$$y = \sin\vartheta \int_0^s \sin\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}}{\sin\vartheta}\right] ds$$

$$z = s \cdot \cos\vartheta.$$

Der Krümmungsradius R und die Bogenlänge S der Kurve, in der der Zylinder der Schraubenlinien die xy-Ebene schneidet, sind

$$R = h \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1}$$

$$S = s \cdot \cos\vartheta,$$

so daß die natürliche Gleichung der Schnittkurve:

$$R = h \sin\vartheta \cos\vartheta \sqrt{e^{\frac{2S}{h\cos\vartheta}}-1}$$

lautet.

Diese Gleichung definiert eine Pseudotraktrix. Mithin gilt:

Die behandelten Schraubenlinien liegen geodätisch auf einem Zylinder, dessen Schnittkurve mit der xy-Ebene eine Pseudotraktrix ist.

Der Verlauf der Schraubenlinien im Raume ergibt sich aus der Gestalt der Pseudotraktrix. Ihr Anfangspunkt ist singulär, da in ihm das Bogenelement Null wird. Von diesem Punkte aus erstreckt sie sich in 2 Zweigen, von denen jeder sich einem Kreise asymptotisch nähert. Bei der Verbiegung bleibt der singuläre Punkt der Traktrix erhalten. Dieser muß also senkrecht über dem Anfangspunkt der Schnittkurve in der xy-Ebene liegen. Von ihm aus gehen die beiden Zweige der Schraubenlinie. Jeder windet sich ∞ oft auf dem Zylinder herum, um im Unendlichen in eine Schraubenlinie des Rotationszylinders überzugehen.

Jeder Zweig der betrachteten Schraubenlinien nähert sich gewissermaßen der Schraubenlinie des Rotationszylinders asymptotisch.

§ 2. Untersuchung der Binormalenfläche.

a) Aufstellung der Gleichungen ihrer Haupttangentenkurven.

Die Binormalenfläche stellt sich analytisch dar durch die Gleichungen:

$$x = -\sin\vartheta \int_0^s \cos u \cdot ds - \tau \cos\vartheta \cdot \cos u$$

$$(1.) \qquad y = \sin\vartheta \int_0^s \sin u \cdot ds + \tau \cos\vartheta \cdot \sin u$$

$$z = \cos\vartheta \cdot s - \tau \cdot \sin\vartheta,$$

wo zur Abkürzung

$$u = \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1}}{\sin\vartheta}$$

gesetzt ist. Es bestehen die Gleichungen:

$$x_s = -\sin\vartheta\cos u + \tau \frac{\sin u}{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1}}$$

$$y_s = \sin\vartheta\sin u + \tau \frac{\cos u}{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1}}$$

$$z_s = \cos\vartheta$$

$$x_\tau = -\cos\vartheta \cdot \cos u$$

$$y_\tau = \cos\vartheta \cdot \sin u$$

$$z_\tau = \operatorname{sind}\vartheta$$

$$x_{\tau s} = \frac{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} \cdot \sin u}{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1}}$$

$$y_{\tau s} = \frac{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} \cdot \cos u}{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1}}$$

$$z_{\tau s} = 0$$

$$x_{ss} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cdot \sin u}{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1}} + \tau \frac{\sqrt{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1} \cdot \cos u - \sin \vartheta \cdot \sin u \cdot e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}}}{h^2 \cos \vartheta \left(e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y_{ss} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cdot \cos u}{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1}} - \tau \frac{\sqrt{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1} \cdot \sin u + \sin \vartheta \cdot \cos u \cdot e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}}}{h^2 \cos \vartheta \left(e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{ss} = 0.$$

Die Fundamentalgrößen der Fläche lauten:

$$E = 1 + \frac{\tau^2}{h^2 \cdot \left(e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1\right)}, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

$$D = \sqrt{E}, \quad N = 0,$$

$$L = \frac{1}{D} \cdot \frac{-h^2 \sin \vartheta \left(e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1\right) + \tau \cdot h \sin \vartheta \cdot e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - \sin \vartheta \cdot \tau^2}{h^3 \cos \vartheta \left(e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$M = -\frac{1}{D} \frac{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}}}{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1}}$$

Die Haupttangentenkurven genügen den Gleichungen:

$$d s = 0$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2 h \cdot \sqrt{e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1}} - \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cdot e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}}}{2 h^2 \left(e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \tau + \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2 h^3 \left(e^{\frac{2 s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \tau^2. \tag{2.}$$

Man erkennt, daß $\tau = h$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (2) ist. Mithin existiert tatsächlich auf den Binormalenflächen der betrachteten Schraubenlinien eine Asymptotenlinie in konstantem Abstand von der Striktionslinie.

Da eine partikuläre Lösung der Riccatischen Gleichung in (2.) bekannt ist, so läßt sich die Gleichung der einen Schar der Haupttangentenkurven auf eine Quadratur zurückführen. Man führe Z in die Riccatische Gleichung mittelst der Substitution[1])

$$\tau = h + \frac{1}{Z}$$

ein. Dann ergibt sich:

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 2\right)}{2h^2\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} Z - \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2h^3\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.}$$

Als Lösung dieser Gleichung erhält man:

$$Z = -e^{\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2h^2}\int_a^s \frac{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 2}{\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} ds} \cdot \tag{4.}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2h^3}\int_a^s \frac{e^{-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2h^2}\int_a^s \frac{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 2}{\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} ds}}{\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} ds,$$

wo c Integrationskonstante ist. Setzt man τ ein, so erhält man

---

1) J. A. Serret: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung III 3. Aufl. Leipzig 1909 Seite 120.

$$\tau = -e^{-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2h^2}\int_a^s \frac{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-2}{\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}ds}$$

$$\cdot\frac{2h^3}{\operatorname{tg}\vartheta}\frac{1}{\int_c^s \frac{e^{-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2h^2}\int_a^s \frac{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-2}{\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}ds}}{\left(e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}ds} + h \tag{5.}$$

als Lösung der Differentialgleichung (2.).

b) Verhalten der Fläche wie eine Minimalfläche längs der ausgezeichneten Haupttangentenkurve.

Wie man aus den Gleichungen (2) des letzten Abschnitts erkennt, fällt auf einer geradlinig nicht abwickelbaren Fläche die eine Schar der Haupttangentenkurven in die geradlinig Erzeugenden der Fläche, während die andere Schar einer Riccatischen Differentialgleichung genügt. Wir haben gesehen, daß eine Haupttangentenkurve der zweiten Schar im konstanten Abstand von der Striktionslinie verläuft. Letztere durchschneidet alle geradlinig Erzeugenden, da es ihre Binormalen sind, rechtwinklig. Mithin muß auch die eine Haupttangentenkurve alle anderen der mit den geradlinig Erzeugenden zusammenfallenden Schar unter einem rechten Winkel kreuzen. Längs dieser Kurve muß sich also die Fläche wie eine Minimalfläche verhalten. Dies erkennt man sofort aus der Gleichung für die mittlere Krümmung

$$H = \frac{L}{D^2}.$$

Da für $\tau = h$ die Größe D nicht gleich Null ist, dagegen aber L, so ist $H = 0$. Die Indikatrix geht somit längs der ausgezeichneten Haupttangentenkurve in eine gleichseitige Hyperbel über. Der Charakter der Minimalfläche längs der

einen Asymptotenlinie läßt sich auch erkennen an dem Verhalten der Minimalkurven und der Kreispunktpolarkurven. Erstere sind auf den Flächen mit der mittleren Krümmung $H = 0$ zueinander konjugiert, und letztere Kurvenklasse fällt auf diesen Flächen mit den Minimalkurven zusammen. Auf den Binormalenflächen haben die Minimalkurven die Gleichungen:

$$\frac{d\tau}{ds} = \pm i\sqrt{E}.$$

Diese Gleichung erfüllt die Bedingung für konjugierte Richtungen

$$L\,ds^2 + M(k + \varkappa) + N \cdot k\varkappa = 0$$

nur dann, wenn $L = 0$ ist, also längs der in Frage stehenden Asymptotenlinie. Die Kreispunktpolarkurven[1]) haben die Gleichungen:

$$ds^2(G\,L^2 - 2\,F\,L\,M + E\,M^2) + 2\,ds\,d\tau(L\,G\,M - F[L\,N + M^2] + E\,M\,N) + d\tau^2(G\,M^2 - 2\,F\,M\,N + E\,N^2) = 0.$$

Diese geht über in die Gleichung

$$\frac{d\tau}{ds} = \pm i\sqrt{E},$$

wenn $L = F = N = 0$ ist. Auf der Binormalenfläche tritt dies ein längs der einen Haupttangentenkurve, die alle anderen der anderen Schar senkrecht schneidet.

§ 3. Untersuchung der Haupttangentenkurve.

a) Nachweis, daß sie geodätische Linie auf der Böschungsfläche der Schraubenlinie ist.

Die Gleichung der ausgezeichneten Haupttangentenkurven erhält man, wenn man in der Gleichung für die Binormalenfläche $\tau = h$ setzt.

---

1) Crelles Journal Bd. 137. 1910, S. 145—165.

Die Gleichung lautet:

$$x = -\sin\vartheta \int_0^s \cos u \, ds - h\cos\vartheta\cos u$$

$$y = \sin\vartheta \int_0^s \sin u \, ds + h\cdot\cos\vartheta\cdot\sin u$$

$$z = s\cdot\cos\vartheta - h\cdot\sin\vartheta.$$

Es seien (α, β, γ), (l, m, n), (λ, μ, ν), S, r_1, ϱ_1, der Reihe nach die Richtungskosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale, Bogenlänge, Krümmungsradius und Torsionsradius, so bestehen die Relationen:

$$\frac{dS}{ds} = \frac{e^{\frac{s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}}{\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}}$$

$$S = \frac{h}{\mathrm{tg}\,\vartheta}\lg\left[\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1} + e^{\frac{s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}\right] + C$$

$$\alpha = \frac{-\sin\vartheta\cdot\cos u\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1} + \sin u}{e^{\frac{s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}}$$

$$\beta = \frac{\sin\vartheta\cdot\sin u\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1} + \cos u}{e^{\frac{s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}}$$

$$\gamma = \frac{\cos\vartheta\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}}{e^{\frac{s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}}$$

$$l = \cos\vartheta\cdot\cos u,\quad m = -\cos\vartheta\cdot\sin u,\quad n = \sin\vartheta$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} \cdot \sin u + \sin\vartheta \cdot \cos u}{e^{\frac{s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}}$$

$$\mu = \frac{\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} \cdot \cos u - \sin\vartheta \cdot \sin u}{e^{\frac{s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}}$$

$$\nu = -\cos\vartheta\, e^{\frac{-s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}$$

$$r_1 = h\, e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}, \quad \varrho_1 = \frac{h\, e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}}}{\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1}}.$$

Aus der Tatsache, daß die Hauptnormalen dieser Kurve auf den Tangenten der Schraubenlinien senkrecht stehen, und aus der Gleichung $n = \sin\vartheta$ ist ersichtlich, daß die eine Haupttangentenkurve geodätische Linie auf der Böschungsfläche ist. Rein geometrisch geht dies aus der Verbiegung der Traktrix hervor. Die ausgezeichnete Haupttangentenkurve verbiegt sich aus der Leitlinie der Traktrix, also einer Geodätischen der Ebene. Da bei einer Verbiegung der Ebene zu einer Tangentenfläche die Geodätischen wieder in Geodätische übergehen, so folgt das oben angegebene Resultat.

b) Einige Beziehungen zur Schraubenlinie.

Bezeichnet man den Winkel, den das Bogenelement der Schraubenlinie mit dem Bogenelement der Haupttangentenkurve bildet, mit a, so gilt

$$\cos a = \frac{\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}} - 1}}{e^{\frac{s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}} = \frac{ds}{dS}.$$

Das Bogenelement der Schraubenlinie ist gleich dem Bogenelement der Haupttangentenkurve, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die Bogenelemente in den entsprechenden Punkten der beiden Kurven miteinander bilden.

Außerdem bestehen noch die Relationen

$$\frac{\varrho_1}{r_1} \cdot \varrho = h, \quad \frac{\varrho_1}{r_1} \cdot r = h \operatorname{cotg} \vartheta.$$

Die Größe[1]) $h \operatorname{cotg} \vartheta$ ist der konstante Abstand der Schraubenlinie und der Haupttangentenkurve, gemessen auf den Tangenten der Schraubenlinie. Also gilt der Satz:

Das Verhältnis aus Torsion und Krümmung der ausgezeichneten Asymptotenlinie, multipliziert mit dem Torsionsradius der Schraubenlinie, ist gleich dem konstanten Abstand dieser beiden Kurven, gemessen auf den Binormalen der Schraubenlinie; dasselbe Verhältnis, multipliziert mit dem Krümmungsradius der Schraubenlinie, ist gleich dem konstanten Abstand dieser beiden Kurven, gemessen auf den Tangenten der Schraubenlinie.

Bestimmt man im Anschluß hieran nach die Gratlinie der rektifizierenden Fläche der einen Haupttangentenkurve, so erhält man als ihre Gleichungen:

$$\xi = -\sin\vartheta \int_0^s \cos u \cdot ds$$

$$\eta = \sin\vartheta \int_0^s \sin u \cdot ds$$

---

1) Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung XXII, 1. Abt., Heft 3/4, Seite 65.

$$\zeta = \cos\vartheta - \frac{h}{\sin\vartheta}.$$

Hiermit ist der Satz[1]) verifiziert:

Die Kurve, auf deren Binormalenfläche eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert, und die Gratlinie der rektifizierenden Fläche letzterer Asymptotenlinie besitzen dieselbe rektifizierende Fläche.

c) Verbiegung aus einer ebenen Kurve.

Die natürlichen Gleichungen der ausgezeichneten Haupttangentenkurve lauten:

$$r_1 = \frac{h}{4}\left(e^{\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{h}s} + e^{-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{h}s}\right)^2$$

(1.)

$$\varrho_1 = \frac{h}{2}\,\frac{\left(e^{\frac{2\operatorname{tg}\vartheta}{h}s} + 1\right)^2}{e^{\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{h}s}\left(e^{\frac{2\operatorname{tg}\vartheta}{h}s} - 1\right)}$$

Man deute die erste dieser Gleichungen als natürliche Gleichung einer ebenen Kurve und denke sich die Haupttangentenkurve durch eine Verbiegung, die die Tangenten geradlinig läßt, aus dieser ebenen Kurve entstanden. Man kann diese natürliche Gleichung als eine Verallgemeinerung der natürlichen Gleichung einer Kettenlinie[2]) gleichen Widerstandes ansehen. Letztere Gleichung lautet:

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$$

wo r den Krümmungsradius, s die Bogenlänge, a einen konstanten Faktor bedeutet. Es läßt sich von den durch die

1) Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung XXII, 1. Abt. Heft 3/4, Seite 65.

2) Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie 1901, Seite 5.

erste der Gleichungen (1) definierten Kurven zeigen, daß sie im hohen Maße ähnliche geometrische Eigenschaften haben wie die Kettenlinien. Zu diesem Zweck stelle man sie in natürlichen Koordinaten dar. Es sei (u, v) das Achsenkreuz, das aus der Tangente und Normale — im positiven Sinne durchlaufen — einer willkürlich gewählten Anfangslage besteht, und φ der Winkel, den die Tangente irgend eines Punktes der Kurve mit der Anfangslage bildet. Dann gilt

$$\varphi = \int_0^S \frac{dS}{r_2} = \frac{4}{h} \int_0^S \frac{dS}{\left(e^{\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{h} S} + e^{-\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{h} S}\right)^2}.$$

Also ist

$$\varphi = \frac{4}{\operatorname{tg}\vartheta} \mathfrak{Tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{h} S\right).$$

Die natürlichen Koordinaten der Kurve lauten mithin

$$u = \int_0^s \cos\left[\frac{4}{\operatorname{tg}\vartheta} \mathfrak{Tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{h} S\right)\right] dS.$$

$$v = \int_0^s \sin\left[\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{4} \mathfrak{Tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{h} S\right)\right] dS.$$

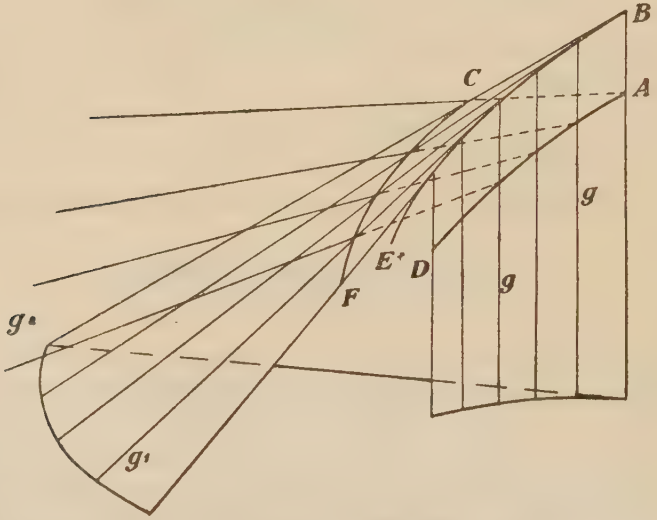
Die Kettenlinie besitzt folgende geometrische Eigenschaften[1]): Wenn der Bogen unbegrenzt zunimmt, so wächst der Krümmungsradius beständig bis ins Unendliche, während φ, wenn auch beständig wachsend, doch endlich bleibt, so daß die Tangente einer Endlage zustrebt, ohne in eine Asymptote überzugehen. Außerdem besitzt die Kettenlinie weder Spitzen noch Rückkehrpunkte und ist vollkommen symmetrisch zu der Normalen der Anfangslage. Bei der in Frage stehenden Kurve ist weder r_1 noch $\frac{1}{r_1}$ für irgend

1) Cesàro, wie oben Seite 4—5.

einen Wert von S gleich Null. Mithin besitzt diese Kurve weder Spitzen noch Rückkehrpunkte. Bei unbegrenzt wachsendem S wächst r_1 beständig bis ins Unendliche, dagegen der Winkel φ nur von 0 bis 1. Daß die Kurve keine Asymptote besitzt, erkennt man daran, daß die Gleichung

$$\lim_{S=\infty} \frac{S}{r_1} = 0$$

nicht besteht. Setzt man für S den negativen Wert ein, so behält r_1 seinen Wert bei. Die Kurve ist also symmetrisch



(Figur im Anschluß an Scheffers. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie I.)

zur Normale im Anfangspunkt. Da also die Eigenschaften beider Kurven in einigen Punkten übereinstimmen, so zeigen sie auch einen ähnlichen Verlauf, nur steigt die diskutierte Kurve wesentlich flacher an als die Kettenlinie, denn ihr Winkel φ variiert nur von 0 bis 1, während der der Kettenlinie die Werte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft. Mithin gilt der Satz:

Die Haupttangentenkurve geht durch Biegung, bei der die Tangenten geradlinig bleiben, aus einer ebenen Kurve mit der natürlichen Gleichung

$$r_1 = \frac{a}{2k} \operatorname{Cos}^2 \frac{s}{a} \quad (a \text{ und } k \text{ konstant})$$

hervor. Diese Kurve hat ähnliche geometrische Eigenschaften wie die Kettenlinie.

Auch ist es nicht ohne Interesse, sich die in diesem Paragraphen gewonnenen geometrischen Ergebnisse durch eine Figur zu veranschaulichen. (Siehe Figur S. 26.)

Die Geradenschar g stellt die geradlinig Erzeugenden des Zylinders dar, g_1 die geradlinig Erzeugenden der Böschungsfläche der Schraubenlinie $B\,E$, g_2 die Binormalen der Schraubenlinie $A\,D$. Letztere beiden Kurven sind kongruent, da sie auf demselben Zylinder liegen. $C\,F$ stellt die Haupttangentenkurve auf der Binormalenfläche der Schraubenlinie $A\,D$ dar, zugleich aber eine geodätische Linie der Böschungsfläche der Schraubenlinie $B\,E$.

§ 4. Zylinder der ausgezeichneten Haupttangentenkurve.

Der Zylinder, auf dem die ausgezeichnete Haupttangentenkurve liegt, wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = -\sin\vartheta \int_0^s \cos u \cdot ds - h\cos\vartheta\cos u$$

(1.)

$$y = \sin\vartheta \int_0^s \sin u \cdot ds + h \cdot \cos\vartheta \cdot \sin u.$$

Bezeichnet man mit T den Winkel gegen die x-Achse, so ist:

$$\sin T = \frac{\sin\vartheta \cdot \sin u \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\,\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1 + \cos u}}{\sqrt{\sin^2\vartheta \cdot e^{\frac{2s\,\operatorname{tg}\vartheta}{h}} + \cos^2\vartheta}}$$

$$\cos T = \frac{-\sin\vartheta\cdot\cos u\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}-1}+\sin u}{\sqrt{\sin^2\vartheta\cdot e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}+\cos^2\vartheta}}.$$

Die Gleichung der Normalen der Schnittkurve des Zylinders, auf dem die Haupttangentenkurve liegt, ist demnach

$$(2.)\quad \begin{aligned}&(\xi-x)\left(\sin u-\sin\vartheta\cdot\cos u\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}-1}\right)\\&+(\eta-y)\cdot\left(\cos u+\sin\vartheta\cdot\sin u\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}-1}\right)=0.\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Pseudotraktrix, der Schnittkurve des Zylinders der Schraubenlinie, bestimmen sich zu:

$$(3.)\quad \begin{aligned}x_0&=-\sin\vartheta\int_0^s\cos u\cdot ds+h\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\cos u\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}-1}\\y_0&=\sin\vartheta\int_0^s\sin u\cdot ds+h\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\sin u\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}-1}.\end{aligned}$$

Es läßt sich zeigen, daß dieser Krümmungsmittelpunkt auf der durch die Gleichung (2) bestimmten Normalen liegt. Man bilde nämlich

$$(4.)\quad \begin{aligned}x_0-x&=h\cos\vartheta\left\{\sin\vartheta\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}-1}\cdot\sin u+\cos u\right\}\\y_0-y&=h\cos\vartheta\left\{\sin\vartheta\cdot\sqrt{e^{\frac{2s\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{h}}-1}\cdot\cos u+\sin u\right\}.\end{aligned}$$

Diese Werte erfüllen die Gleichung (2). Mithin gilt der Satz:

Die Schnittkurve des Zylinders der Haupttangentenkurve mit der x-y-Ebene ist eine Äquitangentialkurve der Pseudotraktrix.

Dieses Resultat läßt sich auch rein geometrisch einsehen. Die ausgezeichnete Haupttangentenkurve ist auch geodätische Linie der Böschungsfläche und hat als solche gleichen Abstand von der Schraubenlinie. Da die Tangenten letzterer Kurve gleiche Horizontalneigung haben, so bildet sich eine konstante Strecke auf den Tangenten auch als konstante Strecke auf den Tangenten der Pseudotraktrix ab.

§ 5. Polarfläche der Schraubenlinien.

Der Ort der Schmiegungskugeln der Schraubenlinien hat die Gleichungen:

$$\xi = -\sin\vartheta \int_0^s \cos u \cdot ds + h\cot g\,\vartheta \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}} - 1} \cdot \sin u$$

$$+ h\cos\vartheta \cdot e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}} \cdot \cos u$$

$$(1.)\quad \eta = \sin\vartheta \int_0^s \sin u \cdot ds + h\cot g\,\vartheta \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}} - 1} \cdot \cos u$$

$$- h\cos\vartheta \cdot e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}} \cdot \sin u$$

$$\zeta = s \cdot \cos\vartheta + h\sin\vartheta \cdot e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}}.$$

Diese Kurve ist auch eine Schraubenlinie mit den natürlichen Gleichungen:

$$R = \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\left\{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}} - 1}\left(\cos^2\vartheta + 2\sin^2\vartheta\, e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}}\right)\right\}$$

$$\varrho = \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left\{h \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}} - 1}\left(\cos^2\vartheta + 2\sin^2\vartheta\, e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}}\right)\right\}$$

$$S = s \cdot \cot g\,\vartheta + h\, e^{\frac{2s\,tg\,\vartheta}{h}}.$$

Die Polarfläche ist eine Böschungsfläche mit den geodätischen Linien:

$$\xi = -\operatorname{cin}\vartheta \int_0^s \cos u \cdot ds + h \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} \cdot \sin u$$

$$- h \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos u \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} \cdot \operatorname{tg}\left[\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} + a\right]$$

$$\eta = \sin\vartheta \int_0^s \sin u \cdot ds + h \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} \cdot \cos u$$

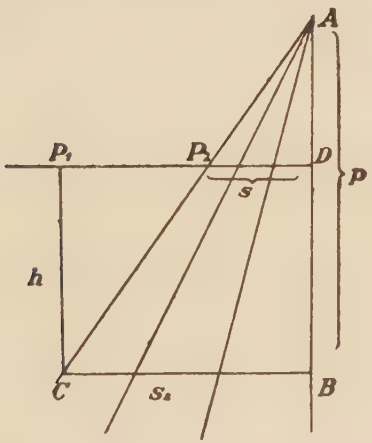
$$+ h \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin u \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} \cdot \operatorname{tg}\left[\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} + a\right]$$

$$\zeta = \cos\vartheta \cdot s - h \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \sin\vartheta \cdot \sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} \cdot \operatorname{tg}\left[\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^{\frac{2s\operatorname{tg}\vartheta}{h}} - 1} + a\right].$$

II. Kapitel.

Kegelgeodätische, auf deren Binormalenflächen eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert.

§ 1. Aufstellung der Gleichungen.



Da die Winkel, die eine geodätische Linie des Kegels mit zwei aufeinanderfolgenden geradlinigen Erzeugenden des Kegels bildet, sich um den Winkel unterscheiden, die die geradlinig Erzeugenden bilden, so muß jede geodätische Linie des Kegels mit einer bestimmten Erzeugenden einen rechten Winkel bilden. Wickelt man den Kegel von dieser Erzeugenden aus

ab, so stellen sich diejenigen Geodätischen, die diese Erzeugende rechtwinklig schneiden, als orthogonale Gerade dar. Diese Schnittpunkte dieser Geraden nennt man den Scheitel der Geodätischen. In diesem Punkt steht also die rektifizierende Gerade senkrecht auf der Tangente und Hauptnormale, mithin muß sie mit der Binormalen zusammenfallen. In der Abwicklung sei s_2 die Geodätische, die aus derjenigen Geodätischen des Kegels hervorgeht, auf derer Binormalenfläche im konstanten Abstand von der Striktionslinie eine Haupttangentenkurve existiert. Dann laufen alle ihre Binormalen in der Abwicklung parallel der rektifizierenden Geraden im Scheitel der Geodätischen. Mithin stellt P_1 einen Punkt der Haupttangentenkurve dar. s ist wiederum eine Geodätische, die aus derjenigen Geodätischen des Kegels entsteht, die Gratlinie der rektifizierenden Fläche der Haupttangentenkurve durch P_1 ist. Diese Geodätische des Kegels schneidet die geradlinig Erzeugenden unter demselben Winkel wie s_2, und ihr Scheitel liegt auf derselben Erzeugenden wie der von s_2. Wickelt man die Tangentenfläche der Kegelgeodätischen ab, so erhält man eine Gerade als Bild der ausgezeichneten Haupttangentenkurve, weil diese geodätisch liegt auf der Tangentenfläche. Aus der Figur ergibt sich:

$$P_1 P_2 = s_2 - s = s\left(\frac{-h}{p-h}\right), \tag{1.}$$

da $s_2 : s = p : (p-h)$ ist.

$P_1 P_2$ stellt die Länge der Tangente dar und s die Bogenlänge, diese Verhältnisse bleiben bei der Verbiegung erhalten. Mithin ergibt sich der Satz:

Die geodätischen Linien des Kegels, auf deren Binormalenflächen eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert, gehen durch Biegung, die die Tangenten geradlinig läßt, aus ebenen Kurven hervor, bei denen die Bogenlänge zur Länge der Tangente, diese gemessen vom Kurvenpunkt bis zu einer festen Achse, proportional ist.

Aus der Tatsache, daß im Scheitel die rektifizierende Gerade mit der Binormalen zusammenfällt, kann man schließen:

Im Scheitel der geodätischen Linien berührt die ausgezeichnete Asymptotenlinie den Kegel und zwar im Scheitel der Gratlinie ihrer rektifizierenden Fläche.

Die Bogenlänge ist vom Scheitel gezählt, mithin ist sie in diesem Punkte gleich Null, also auch die Länge der Tangente.

Es soll die Gleichung derjenigen ebenen Kurven aufgestellt werden, aus denen sich die Kegelgeodätischen verbiegen. Da die Länge der Tangente zur Bogenlänge proportional sein soll, so gilt

$$P_1 P_2 = \frac{y \cdot ds}{dy} \tag{2.}$$

Da $P_1 P_2 = s\left(\frac{-h}{p-h}\right)$ ist, so erhält man

$$s\left(\frac{-h}{p-h}\right) = \frac{y \cdot ds}{dy} \tag{3.}$$

Diese Gleichung wird gelöst durch den Ansatz

$$y = A s^k,$$

wo A Integrationskonstante und $k = \frac{h-p}{h}$ ist. Mit Hilfe der Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ergibt sich

$$x = \int \sqrt{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)}}\, ds.$$

Die Gleichungen der ebenen Kurven lauten mithin:

$$\begin{aligned} x &= \int \sqrt{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)}}\, ds, \\ y &= A s^k. \end{aligned} \tag{4.}$$

Es handelt sich also um diejenigen ebenen Kurven, bei denen die Ordinate einer Potenz des Bogens proportional

ist. Diese Kurven sind aber Evoluten[1]) der Ribaucourschen Kurven. Mithin hat man die Sätze:

Die geodätischen Linien des Kegels, auf deren Binormalenflächen eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie existiert, gehen durch Biegung, bei der die Tangenten geradlinig bleiben, aus Evoluten Ribaucourscher Kurven hervor.

Bei den Evoluten Ribaucourscher Kurven ist die Bogenlänge zur Länge der Tangente, diese gemessen vom Kurvenpunkt bis zu einer festen Achse, proportional.

Der Krümmungsradius berechnet sich zu

$$R = \frac{\sqrt{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)}}}{k \cdot (k-1) A s^{k-2}}.$$

Da der Kegel vom Scheitel der Geodätischen aus abgewickelt ist, so gilt

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{s}{p}.$$

Mithin ist der Torsionsradius der Geodätischen

$$\varrho = \frac{p \cdot \sqrt{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)}}}{k \cdot (k-1) \cdot A s^{k-1}}.$$

Die natürlichen Gleichungen der geodätischen Linien lauten also:

$$(5.) \qquad R = \frac{\sqrt{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)}}}{k(k-1) \cdot A \cdot s^{k-2}}$$

$$\varrho = \frac{p \cdot \sqrt{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)}}}{k \cdot (k-1) \cdot A \cdot s^{k-1}}.$$

---

1) Gino Loria, Spezielle algebraische u. transzendente ebene Kurven, 1902, Seite 601.

H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Sammlung Schubert H. VI 1908, Seite 392.

In diesen Werken findet sich weitere Literatur angegeben.

Sind R_1 und ϱ_1 entsprechende Bestimmungsstücke der Haupttangentenkurve, so gelten die Gleichungen[1]):

$$R_1 = \frac{\varrho^2 + h^2}{h}$$

$$\varrho_1 = \frac{\varrho^2 + h^2}{\varrho}.$$

Die natürlichen Gleichungen der Haupttangentenkurve lauten:

(6.)

$$R_1 = p^2 \frac{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)} \left(1 - \frac{h^2}{p^2}(k-1)^2\right)}{h k^2 (k-1)^2 A^2 s^{2(k-1)}}$$

$$\varrho_1 = p \frac{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)} \left(1 - \frac{h^2}{p^2}(k-1)^2\right)}{k(k-1) A s^{k-1} \sqrt{1 - k^2 A^2 s^{2(k-1)}}}$$

Es soll gezeigt werden, daß die unter (5) gefundenen Kurven tatsächlich der Gleichung genügen, die allgemein für Kurven gilt, auf deren Binormalenfläche eine zur Striktionslinie äquidistante Asymptotenlinie sich vorfindet. Deren Gleichung[2]) lautet:

$$\varrho^2 + h^2 = h r \varrho',$$

wo h den konstanten Abstand bedeutet, der Strich die Differentiation nach der Bogenlänge andeuten soll. Setzt man die unter (5) gefundenen Werte ein, so erhält man:

$$s^{2(k-1)} [k^2 A^2 h^2 (k-1)^2 - p^2 k^2 A^2] + p^2 + h p (k-1) = 0$$

oder $$[p + h(k-1)] \cdot \{s^{2(k-1)} \cdot A^2 \cdot k^2 [h(k-1) - p] + p\} = 0.$$

Setzt man

$$p + h(k-1) = 0,$$

so ergibt sich $k = \frac{h-p}{h}$, also der oben angegebene Wert.

---

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 22. Band 3/4, 1913, Seite 66, Formel 2.

2) Daselbst Formel 1.

Die synthetisch gewonnenen natürlichen Gleichungen der Kurven können auch analytisch hergeleitet werden. Die Bedingung, daß eine Kurve in konstantem Abstand von der Striktionslinie eine Asymptotenlinie auf ihrer Binormalenfläche hat, lautet:

$$\varrho^2 + h^2 = h\, r\, \varrho'.$$

Die geodätischen Linien des Kegels genügen den Gleichungen:

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{s}{p}.$$

Mithin erhält man

$$\frac{2p}{h} \log s = \log (\varrho^2 + h^2)$$

oder

$$\varrho = \sqrt{s^{\frac{2p}{h}} - h^2}\,.$$

Es ist dann

$$r = \frac{s}{p} \sqrt{e^{\frac{2p}{h}} - h^2}\,.$$

Diese Werte lassen sich mit den unter (5.) gefundenen in Einklang bringen.

Da die Traktrix [1]) im Grenzfall noch zu den Evoluten der Ribaucourschen Kurven gehört, so erkennt man deutlich die in diesem Kapitel gewonnene Verallgemeinerung.

§ 2. Der Exponent k in der Gleichung $y = A\, s^k$.

Richard Müller hat in seiner Arbeit [2]) nur die Kurven, für die $k > 1$ ist, zu der Kurvenklasse gerechnet, bei denen die y-Koordinate einer Potenz des Bogens proportional ist. Er

1) H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Sammlung Schubert H. VI, 1908, Seite 394.

2) R. Müller: Über die Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist (Progr. Berlin 1889).

begründet dies damit, daß für alle anderen Werte von k der Wert $s = 0$ nicht zum Realitätsbereich der Kurve gehört, und daß man deshalb einen neuen Bogen $s' = s + a$ einführen müsse, um einen Nullpunkt der Bogenzählung zu erhalten. Bekanntlich sind die Kurven Evoluten Ribaucourscher Kurven. Bezeichnet man mit R_1 den Krümmungsradius der Evolvente und mit s die Evolutenbogenlänge, so ist:

$$R_1 = s + C.$$

Da C eine willkürliche Konstante ist, kann man sie gleich Null setzen. Man erkennt, daß s nur dann den Wert Null annimmt, wenn R_1 verschwindet. Tatsächlich existieren unter den Ribaucourschen Kurven solche, bei denen R_1 niemals Null wird, z. B. Parabel und Kettenlinie. Mithin kann auch s nie verschwinden, d. h. die Bogenzählung kann nicht bei dem Wert $s = 0$ beginnen, sondern als Anfangswert ist derjenige zu nehmen, für den R_1 sein Minimum erreicht. Man erkennt hieraus, daß die Fixierung willkürlich und nicht durch die Problemstellung begründet ist.

Können wir nun alle Evoluten Ribaucourscher Kurven zu Kegelgeodätischen verbiegen? Nimmt k negative Werte an, so liegt der Punkt $s = 0$ im Unendlichen. Dieser Punkt fällt aber in den Scheitel der Geodätischen, d. h. ein unendlich ferner Punkt verbiegt sich zu einem endlichen Punkt. Dies ist unmöglich. Selbst bei Einführung einer neuen Bogenzählung läßt sich dies nicht umgehen. Mithin besteht der Satz:

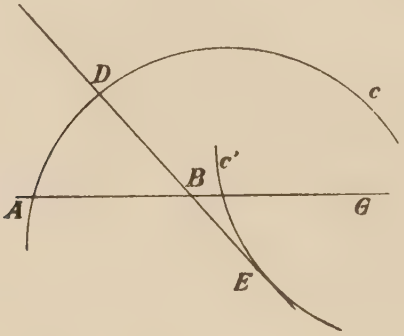
Von den Evoluten Ribaucourscher Kurven verbiegen sich nur diejenigen zu Kegelgeodätischen, für die $k > 0$ ist.

§ 3. Evoluten der Ribaucourschen Kurven.

Die Kurven, bei denen die eine Koordinate einer Potenz des Bogens proportional ist, sind zum erstenmal identifiziert worden mit den Evoluten Ribaucourscher Kurven von E. Cesàro.[1])

1) E. Cesàro: Sur une note de géométrie infinitésimale, Nouv. Ann. 3. Bd. 13, 1894.

Es soll hier eine neue Ableitung für diese Evoluten gegeben werden. Sie knüpft direkt an die Definition[1]) der Ribaucourschen Kurven von Bernoulli an. Diese lautet: »Über einer gegebenen Geraden AG als Achse und durch den Punkt A eine Kurve zu ziehen von der Beschaffenheit, daß der Krümmungsradius in einem Punkte B von der Achse in einem gegebenen Verhältnis geteilt wird .....«



Die Kurve c sei eine Ribaucoursche Kurve und c' ihre Evolute. DE ist der Krümmungsradius der Kurve c. Nach der Definition ist

$$\frac{DB}{BE} = C,$$

wo C eine Konstante bedeutet. Oder es ist

$$\frac{DB + BE}{BE} = C + 1.$$

Da $DB + BE = R_1$ ist, so folgt:

$$\frac{R_1}{BE} = C + 1$$

1) Gino Loria, Spezielle ebene Kurven 1902, Seite 521.

Zwischen dem Krümmungsradius R_1 der Evolvente und der Bogenlänge s der Evolute besteht die Beziehung[1])

$$R_1 = s,$$

mithin erhält man

$$\frac{s}{BE} = C + 1.$$

BE stellt für die Evolute c' die Länge der Tangente bis zu einer festen Achse dar. Daraus erhält man wiederum den Satz, daß die Bogenlänge proportional der Länge der Tangente ist. Stellt man wie im ersten Paragraphen dieses Kapitels (Seite 33) die Gleichungen für diese Kurven auf, so wird man auf die Klasse geführt, bei denen eine Koordinate einer Potenz des Bogens proportional ist.

§ 4. Ebene Kurven, aus denen sich die Kegelgeodätischen verbiegen.

a) Elementare Fälle.

Da die bekannteren Fälle schon in den früheren Arbeiten[2]) behandelt sind, so sollen diese Kurven nur hinsichtlich der Verbiegung zu Kegelgeodätischen betrachtet werden. Die natürliche Gleichung der ebenen Kurven kann man schreiben:

$$R^2 = \frac{1}{p^2} s^{2 \cdot \frac{p+h}{h}} - \frac{h^2}{p^2} s^2 \tag{1.}$$

Die zykloidalen Kurven[3]) haben die natürliche Gleichung:

$$R^2 = \alpha s^2 + \beta s + \gamma,$$

wo α, β, γ Konstante bedeuten. Mithin erhält man die Zykloidalen, wenn man setzt:

---

1) Gino Loria, Spezielle ebene Kurven 190, Seite 617.

2) Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Sammlung Schubert, LIV, Leipzig 1908, Seite 219.

3) Fleischer, Von den Kurven, bei welchen $s^{m+n} = p^n x^n$ ist (Progr. Grimma 1849).

(2.) $$2 \cdot \frac{p+h}{h} = 0$$

oder

(3.) $$2 \cdot \frac{p+h}{h} = 1$$

oder

(4.) $$2 \cdot \frac{p+h}{h} = 2.$$

Fall (4) liefert den trivialen Fall der geraden Linie Fall (2) ergibt $p = -h$. Die natürliche Gleichung lautet dann

$$R^2 = -s^2 + \frac{1}{h^2}$$

Diese stellt eine gemeine Zykloide dar. Mithin:

Biegt man die Ebene einer gemeinen Zykloide so, daß die Tangenten geradlinig bleiben, zu einer Tangentenfläche einer geodätischen Linie des Kegels, so liegt auf der Binormalenfläche der entstehenden Geodätischen eine Asymptotenlinie in konstantem Abstand von der Striktionslinie.

Es soll bei dieser Kurve die Gerade gesucht werden, die sich zur Haupttangentenkurve verbiegt. Die Gleichung[1]) der gemeinen Zykloide lautet:

(5.)
$$x = a\left(\varphi - \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$y = 2a\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Die ∞^1 Tangenten dieser Kurve stellen sich mittels eines Parameters v dar durch die Gleichungen:

(6.)
$$x = a\left(\varphi - \sin\frac{\varphi}{2}\right) + v\sin\frac{\varphi}{2}$$
$$y = 2a\sin^2\frac{\varphi}{2} + v\cos\frac{\varphi}{2}.$$

---

1) Serret-Scheffers, Lehrbuch d. Differential- und Integralrechnung I 1908, Seite 383.

Der Punkt (x, y) beschreibt jedesmal die betreffende Tangente, wenn v alle Werte durchläuft. Der Bogen der gemeinen Zykloide ist $s = 4a\cos\frac{\varphi}{2}$. Differenziert man die Gleichungen (6) und setzt für v

$$v = k \cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2} \quad (k \text{ konstant}),$$

so erhält man:

$$(7.) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= 2a\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2k \cdot a\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2ak\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ \frac{dy}{d\varphi} &= 2a\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - 4ak\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man $k = \frac{1}{2}$, so wird

$$v = 2a\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = 0, \quad y = 2a \text{ oder } y = \text{konst.}$$

Also:

Bei der gemeinen Zykloide ist die Länge der Tangente, diese gemessen vom Kurvenpunkt bis zu irgend einer Parallelen zur Tangente in den Kulminationspunkten oder bis zur letzteren selbst, proportional zur Bogenlänge des Kurvenpunktes, von dem die Tangente ausgeht.

Da eine Berührung zwischen Haupttangentenkurve und geodätischer Linie im Scheitel stattfindet, so gilt weiter:

Die Tangente in den ∞^1 Kulminationspunkten der gemeinen Zykloide verbiegt sich zur Haupttangentenkurve.

Es darf hier nicht unerörtert bleiben, wie es kommt, daß sich eine Tangente zu einer Kurve verbiegt. Man erkennt sofort, daß bei dieser Verbiegung die Tangente in den ∞^1 Kulminationspunkten eine doppelte Rolle spielt; sie ist anzusehen als die Tangenten der ∞^1 Kulminationspunkte und ferner als die Haupttangentenkurve.

Fall 3 liefert $p = -\frac{h}{2}$. Die Kurven haben die natürliche Gleichung:

$$R^2 = -4s^2 + \frac{4}{h^2}s \tag{8.}$$

Da der Faktor von s^2 kleiner als -1 ist, so können nur reelle Hypozykloiden in Betracht kommen. Die Gleichung (8) läßt sich auf die Form bringen

$$\left(s - \frac{1}{2\,h^2}\right)^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{1}{4\,h^4}$$

Führt man nun statt $s - \frac{1}{2h^2}$ eine neue Variable s' ein, was bedeutet, daß der Bogen von einem Punkte an gerechnet wird, der um $\frac{1}{2h^2}$ von dem anderen Punkte entfernt liegt, so hat man:

$$4s^2 - R^2 = \frac{1}{h^4} \text{ (Strich bei } s \text{ weglassend).} \tag{9.}$$

Dies ist aber die natürliche Gleichung einer Astroide. Also hat man das Ergebnis:

Biegt man die Ebene einer Astroide so, daß die Tangenten geradlinig bleiben, zu der Tangentenfläche einer Kegelgeodätischen, so besitzt die Binormalenfläche letzterer Kurve eine Asymptotenlinie in konstantem Abstand von der Striktionslinie.

Auch bei der Astroide möge die Gerade bestimmt werden, die sich zur Haupttangentenkurve verbiegt. Die Gleichungen[1]) der Astroide lauten:

$$x = 4a\cos^3\frac{\varphi}{4}$$
$$y = 4a\sin^3\frac{\varphi}{4}. \tag{10.}$$

1) Serret-Scheffers: Lehrbuch d. Differential- u. Integral-Rechnung I 1908, Seite 391.

Ihre ∞^1 Tangenten stellen sich dar durch die Gleichungen

$$(11.) \quad \begin{aligned} x &= 4a\cos^3\frac{\varphi}{4} - v\cos\frac{\varphi}{4} \\ y &= 4a\sin^3\frac{\varphi}{4} + v\sin\frac{\varphi}{4} \end{aligned}$$

Die Bogenlänge der Astroide ist $s = -\frac{3}{2}a\cos^2\frac{\varphi}{4}$.

Differenziert man Gleichung (11), so erhält man:

$$(12.) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= -3a\sin\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4} + \frac{v}{4}\sin\frac{\varphi}{4} - \frac{dv}{d\varphi}\cos\frac{\varphi}{4} \\ \frac{dy}{d\varphi} &= 3a\cos\frac{\varphi}{4}\sin^2\frac{\varphi}{4} + \frac{v}{4}\cos\frac{\varphi}{4} - \frac{dv}{d\varphi}\sin\frac{\varphi}{4}. \end{aligned}$$

Setzt man alsdann $v = 4a\cos^2\frac{\varphi}{4}$, so erhält man

$$\frac{dx}{d\varphi} = 0, \text{ d. h. einmal } x = 0 \text{ oder } x = \text{Konst.}$$

Bei der Astroide ist die Länge der Tangente, diese gemessen vom Kurvenpunkt bis zu einer Parallelen zu einer der beiden Achsen der Kurve oder zu dieser letzteren selbst, proportional zur Bogenlänge in dem betreffenden Punkt der Kurve.

Die eine Achse der Astroide verbiegt sich zur Haupttangentenkurve.

Die Verbiegung der Astroide ist längs der Achse, die sich zur Haupttangentenkurve verbiegt, mit einem Aufrollen verbunden. Man denke sich, daß die Astroide unendlich oft mit einem Faden belegt sei, der so aufgerollt wird, daß die singulären Punkte der oben erwähnten Achse zu Kulminationspunkten auf dieser Achse werden, während die singulären Punkte der anderen Achse solche bleiben und alle auf einer Parallelen zur ersten Achse liegen. Die Astroide nimmt somit eine Gestalt ähnlich der gemeinen Zykloide an.

Es ist bekannt, daß zu den betrachteten Kurven [1]) noch die Neilsche Parabel und die Evolute der Kettenlinie gehören. Diese beiden Kurven wollen wir rein geometrisch hinsichtlich ihrer Verbiegung zu Kegelgeodätischen betrachten. Aus der Definition der Ribaucourschen Kurven erkennt man, daß die Tangente im Scheitel der Parabel resp. im Scheitel der Kettenlinien Strecken auf den Tangenten der Evoluten zu diesen beiden Kurven abschneidet, die proportional zur Bogenlänge der Evoluten sind. Mithin müssen sich diese Tangenten an die Parabel sowie an die Kettenlinie zu den Haupttangentenkurven verbiegen. Es ist zu beachten, daß diese letzteren Tangenten nicht die Neilsche Parabel und die Evolute der Kettenlinie berühren. Da aber ein Berührungspunkt vorhanden sein muß, so können letztere Kurven sich nicht ihrer ganzen Länge nach zu Kegelgeodätischen verbiegen, sondern es kommt nur ein Zweig, der bis zur Symmetrieachse reicht, in Betracht. Analytisch geht dies daraus hervor, daß sich die Koordinate längs der Tangente im Scheitel der Kettenlinie resp. im Scheitel der Parabel im Quadrat darstellt. Bei der Verbiegung muß jedoch immer das Vorzeichen festgelegt sein, und da sich dieses beim Durchgang durch den Scheitel ändert, so bestätigt sich die Richtigkeit des oben angegebenen Resultates. Weiter erkennt man, daß zu dem Aste auf dem positiven Teil der Symmetrieachse der Teil der Scheiteltangente auf dem negativen Teil letzterer Achse gehört. Mithin gelten die Resultate:

Biegt man einen von der Spitze bis ins Unendliche reichenden Ast einer Neilschen Parabel resp. einer Evolute der Kettenlinie so, daß die Tangenten geradlinig bleiben, zu einer geodätischen Linie des Kegels, so liegt auf der Binormalenfläche der entstehenden Geodätischen eine Asymptotenlinie im konstanten Abstand von der Striktionslinie. Letztere Asymptotenlinie entsteht aus dem Teil der Scheitel-

1) Fleischer, wie oben.

tangente der Parabel oder der Kettenlinie, der auf der anderen Seite der Symmetrieachse liegt als der zu biegende Ast.

Bei der Neilschen Parabel resp. der Evolute der Kettenlinie ist die Länge der Tangente, diese gemessen vom Kurvenpunkt bis zur Scheiteltangente der als Evolventen dazu gehörenden Parabel resp. Kettenlinie, proportional zur Bogenlänge in dem betreffenden Punkt der beiden ersteren Kurven.

b) Fälle, die auf elliptische Integrale führen.

I.

Man setze in der allgemeinen Gleichung [(4) Seite 33] $k = 3$. Die natürliche Gleichung dieser Kurvenschar lautet:

$$R^2 = \frac{1}{36 A^2} s^{-2} - \frac{1}{4} s^2.$$

Die kartesischen Koordinaten ergeben sich zu

$$(1.) \qquad x = \int \frac{ds}{\sqrt{1 - 9 A^2 s^4}} - 9 A^2 \int \frac{s^4 ds}{\sqrt{1 - 9 A^2 s^4}}$$

$$y = A s^3.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$T = \sqrt{1 - 9 A^2 s^4},$$

$$= \sqrt{-9 A^2 \left(s^2 - \frac{1}{3A}\right)\left(s^2 + \frac{1}{3A}\right)}$$

so ergeben sich die Wurzeln von $T = 0$ als

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{3A}} \qquad s_3 = i\sqrt{\frac{1}{3A}}$$

$$s_2 = -\sqrt{\frac{1}{3A}} \qquad s_4 = -\sqrt{\frac{1}{3A}}.$$

Da die Beziehung $s_1 + s_2 = s_3 + s_4$ besteht, so wende man die Substitution

$$s^2 = \frac{1}{3A}(1 - v^2)$$

$$ds = -\frac{1}{\sqrt{3A}} \frac{v\,dv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

an. Es wird dann

$$T = \sqrt{6A} \cdot v \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}v^2}.$$

Es soll zunächst das Integral

$$\int \frac{s^4\,ds}{T}$$

reduziert werden. Setzt man

$$V = \sqrt{(1 - v^2)\left(1 - \frac{1}{2}v^2\right)},$$

so besteht die Relation:

$$\int \frac{s^4\,ds}{T} = -\frac{1}{27 \cdot \sqrt{2} \cdot A^3}\left[\int \frac{dv}{V} - 2\int \frac{v^2\,dv}{V} + \int \frac{v^4\,dv}{V}\right].$$

Das letzte Integral läßt sich weiter reduzieren. Man erhält, wenn man $v = \sin\varphi$ setzt:

$$\int \frac{v^4\,dv}{V} = \frac{2}{3}\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\varphi - \frac{2}{3}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + 2\int \frac{\sin^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta\varphi},$$

wo $\Delta\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{2}v^2}$ ist.

Es ergibt sich

$$\int \frac{s^4\,ds}{T} = -\frac{1}{81 \cdot \sqrt{2} \cdot A^3}\left[\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\varphi\right].$$

Weiter besteht die Beziehung:

$$\int \frac{ds}{T} = -\frac{1}{3A\cdot\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Mithin lauten die Gleichungen der Kurven:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} x &= -\frac{2}{9\cdot\sqrt{2}\cdot A}\left[\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\varphi\right] \\ y &= \frac{1}{\sqrt{27\,A}}\cos^3\varphi. \end{aligned}$$

Führt man die elliptische Funktion $\varphi = am(u)$ ein, so erhält man:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} x &= -\frac{2}{9\cdot\sqrt{2}\cdot A}\left[u - sn\,u\cdot cn\,u\cdot dn\,u\right] \\ y &= \frac{1}{\sqrt{27\,A}}\,cn^3\,u. \end{aligned}$$

Zum Zweck der Diskussion bilde man:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -\frac{2}{9A\cdot\sqrt{2}}\cdot\left[1 - cn^2u\cdot dn^2u + sn^2u\cdot dn^2u\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}\,sn^2u\,cn^2u\right] \\ \frac{dy}{du} &= -\frac{1}{\sqrt{3A}}\,sn\,u\,cn^2u\,dn\,u. \end{aligned}$$

Die Kurven können nur reell sein für reelle Werte des Arguments u und der Größe A. Setzt man in den Gleichungen (4.) das Argument u gleich Null, so verschwinden $\frac{dx}{du}$ und $\frac{dy}{du}$. Infolge der Beziehungen:

$$sn(u+2K) = -snu,\ cn(u+2K) = -cnu,$$
$$dn(u+2K) = dnu,$$

wo K den vierten Teil der Periode bedeutet, werden diese beiden Größen wiederum zu Null bei Vermehrung des Arguments u um die halbe Periode. Für den ersten dieser Werte wird $y = \frac{1}{\sqrt{27A}}$, für den zweiten $y = -\frac{1}{\sqrt{27A}}$. Da man immer dieselben Werte erhält, wenn man das Argument u um $4K$ vermehrt, so liegen mithin alle singulären Punkte auf zwei Parallelen zur x-Achse, die eine im Abstand $y = \frac{1}{\sqrt{27A}}$, die andere im Abstand $y = -\frac{1}{\sqrt{27A}}$. Da außerdem die Relationen

$$sn(-u) = -sn,\ cn(-u) = cnu,\ dn(-u) = dnu$$

bestehen, so ist die Kurve vollkommen symmetrisch zur y-Achse. Setzt man in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6\sqrt{2}\,sn^2u\cdot cnu\cdot dn^2u - 3\sqrt{2}\,cn^3u\cdot dn^2u + \frac{3}{\sqrt{2}}cn^3u\cdot sn^2u}{-2 + 2\,cn^2u\cdot dn^2u - 2\,sn^2u\cdot dn^2u - sn^2u\cdot cn^2u}$$

$u = K$, so wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, und $\frac{dy}{dx} = 0$. Bildet man dagegen $\frac{d^3y}{dx^3}$, so wird im Zähler dieses Ausdruckes mindestens ein von cnu freies Glied vorkommen. Mithin kann für $u = K$ der Ausdruck $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht verschwinden. Da aber cnu immer bei der Vermehrung des Arguments u um die halbe Periode $2K$ zu Null wird, so kehrt diese Eigenschaft doppelt so oft wieder als der singuläre Punkt auf ein und derselben Parallelen zur x-Achse. Für $u = K$ wird $y = 0$. Also liegen auf der x-Achse ∞^1 eigentliche Inflexionspunkte. Die Kurve verläuft also von einem singulären Punkt auf der

Geraden $y = \frac{1}{\sqrt{27A}}$ zur x-Achse, durchsetzt diese und gelangt zu dem singulären Punkt auf der Geraden $y = -\frac{1}{\sqrt{27A}}$. Dieser Kurvenzweig wiederholt sich unendlich oft. Da die x-Achse Tangente in ∞^1 Punkten der Kurve ist, so zerfällt sie bei der Verbiegung in die ∞^1 geradlinig bleibenden Tangenten der Kegelgeodätischen und in die ausgezeichnete Haupttangentenkurve. C)

Figur (I) stellt den Verlauf der Kurve dar.

II.

Den zweiten elliptischen Fall erhält man, wenn man in der Gleichung [(4) S. 33)] für k den Wert $\frac{5}{2}$ setzt. Die natürliche Gleichung dieser Kurven lautet:

$$R^2 = \frac{16}{225\,A^2}\,s^{-1} - \frac{4}{9}\,s^2.$$

Die kartesischen Koordinaten ihrer Punkte stellen sich in folgender Weise dar:

(1).
$$x = \int \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{25}{4}A^2 s^3}} - \frac{25A^2}{4}\int \frac{s^3\,ds}{\sqrt{1 - \frac{25}{4}A^2 s^3}}$$
$$y = A s^{\frac{5}{2}}.$$

Durch die Substitution:

$$s = -2\sqrt[3]{\frac{2}{25A^2}}\,t, \quad ds = -2\sqrt[3]{\frac{2}{25A^2}}\cdot dt$$

erhält man die Gleichungen:

(2.)
$$x = -2\sqrt[3]{\frac{2}{25\cdot A^2}}\left\{\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3+1}} + 4\int \frac{t^3\cdot dt}{\sqrt{4t^3+1}}\right\}$$
$$y = \left(\frac{16}{25\,A^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{5}{6}}\sqrt{-t^5}.$$

Beachtet man die Relation:

$$\int \frac{t^3\,dt}{\sqrt{4\,t^3+1}} = \frac{1}{10}\cdot\left\{t\cdot\sqrt{4\,t^3+1} - \int \frac{dt}{\sqrt{4\,t^3+1}}\right\},$$

so formen sich Gleichungen (2) um zu:

$$x = -\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{25\,A^2}}\left\{3\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{4\,t^3+1}} + 2\cdot t\cdot\sqrt{4\,t^3+1}\right\}$$

(3.)

$$y = \left(\frac{16}{25\,A^{\frac{4}{5}}}\right)^{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{-t^5}$$

Durch Einführung der $\overline{\wp}$-Funktion erhält man:

$$x = -\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{25\,A^2}}\left\{3\,v + 2\,\overline{\wp}\,v\,\overline{\wp}'\,v\right\}$$

(4.)

$$y = \left(\frac{16}{25\,A^{\frac{4}{5}}}\right)^{\frac{5}{6}}\cdot(-\overline{\wp}\,v)^{\frac{5}{2}}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$4\,t^3+1=0$$

seien e_1', e_2', e_3'. Dann ist

$$e_1' = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$e_2' = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

$$e_3' = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ferner seien die Invarianten der $\overline{\wp}$-Funktion g_2' und g_3'. Da $g_2'=0$ ist, so haben wir es mit dem äquianharmo-

nischen Fall[1]) der $\wp$-Funktion zu tun. Diese hat dann konjugiert komplexe Perioden. Wir können uns nun eine $\wp$-Funktion bilden, deren eine Periode reell und gleich dem reellen Teile der Perioden der $\overline{\wp}$-Funktion, während deren andere Periode rein imaginär und gleich dem imaginären Teil der Perioden der $\overline{\wp}$-Funktion ist. Die Nullstellen der Ableitung derselben bezeichnen wir mit e_1, e_2, e_3. Dann gelten die Beziehungen[2])

$$4e_1 = e_2' + 2\cdot\sqrt{(e_2' - e_3')\cdot(e_2' - e_1')},$$
$$4e_2 = -2e_2',$$
$$4e_2 = e_2' - 2\cdot\sqrt{(e_2' - e_3')\cdot(e_2' - e_1')}.$$

Man erhält:

$$e_1 = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)},$$

$$e_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

$$e_3 = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}.$$

Die $\overline{\wp}$-Funktion[3]) drückt sich folgendermaßen durch die Jacobischen Funktionen aus:

$$\overline{\wp}\, v = -2e_2 + (e_3 - e_3)\frac{1 + cn\,2u}{1 - cn\,2u}, \tag{5.}$$

wo $u = \sqrt{e_1 - e_3}\cdot v$ ist.

Es gelten nun die Gleichungen:

$$\overline{\wp}\, v = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}\frac{1 + cn\,2u}{1 - cn\,2u},$$

1) Krause: Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1912' Seite 153.

2) Krause, wie oben Seite 147.

3) Derselbe, wie oben Seite 151.

$$(6.)\quad \overline{\wp}' v = -2\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}}\cdot\frac{sn\,2u\cdot dn\,2u}{(1-cn\,2u)^2}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (4) ein, so erhält man:

$$x = -\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{25A^2}}\left\{\frac{3}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}}}u - 4\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}\right.$$

$$(7.)\quad \cdot\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}}\cdot\frac{sn\,2u\cdot dn\,2u}{(1-cn\,2u)^3}\cdot\left[\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)cn\,2u\right]\right\}$$

$$y = \left(\frac{16}{25A^4}\right)^{\frac{5}{6}}\left\{-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt{\frac{1}{16}}+1\right)}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)cn\,2u}{1-cn\,2u}\right.$$

Der Realitätsbereich der Kurvenschar ergibt sich aus der Relation:

$$-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} > cn\,2u.$$

Man erkennt, daß das Argument $2u$ nur gewisse Werte annehmen kann in dem Intervall K bis $3K$, wo $4K$ die reelle Periode der Jacobischen Funktionen sein soll.

$$\text{Für } cn\,2u = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$$

wird $y = 0$, während x einen negativen Wert erhält. Dieser Punkt liegt auf der x-Achse und ist, wie man leicht erkennt, ein Inflektionspunkt. Gibt man dem Argument $2u$ immer größere Werte, so erhält $cn\,2u$ negativ größere Werte, während $sn\,2u$ immer kleiner wird, dabei zunächst positiv bleibend. Die Koordinate y wird wachsen; der Ausdruck in der geschweiften Klammer für die x-Koordinate wird einem größten Werte zustreben und von da wieder abnehmen, d. h. x wird bis zu einem kleinsten Werte fallen und dann wieder wachsen. Erreicht jedoch $2u$ den Wert $2K$, so ist $sn\,2u = 0$ und y hat seinen größten Wert. Die Tangente in diesem Punkte läuft der x-Koordinate parallel. Wächst das Argument $2u$ weiter, so wird $sn\,2u$ negativ und $cn\,2u$ wird wieder negativ kleinere Werte annehmen. Die Ordinate y nimmt die vorher angegebenen Werte noch einmal an. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer für die x-Koordinate wird kleiner, d. h. x strebt einem größten Wert zu und wird dann kleiner, bis die Kurve wiederum die x-Achse berührt. Jedoch fällt dieser Punkt nicht mit dem Anfangspunkt zusammen, sondern dieses x ist kleiner als das zu dem Anfangspunkt gehörende. Daraus ergibt sich, daß die Kurve einen Doppelpunkt hat. Einen weiteren Zweig erhält man, wenn man für u negative Werte einsetzt. Dieser liegt auf der anderen Seite der y-Achse und ist symmetrisch zu dem ersten.

Figur (II.) veranschaulicht den Verlauf der Kurve.

§ 5. Die aus den betrachteten ebenen Kurven hervorgehenden geodätischen Linien des Kegels.

Zunächst wollen wir uns den regulären Verlauf[1]) der geodätischen Linie auf einem Kegel klarlegen. Diese kommt in ihrem Scheitel der Spitze des Kegels am nächsten und verläuft von diesem Punkte aus in zwei Ästen ins Unendliche und zwar so, daß jeder Ast sich einer Kegelerzeugenden asymptotisch nähert. Jede dieser Kegelerzeugenden schließt einen Winkel von 90° mit derjenigen Erzeugenden ein, auf der der Scheitel liegt.

Wir betrachten besonders die Geodätischen, die aus der gemeinen Zykloide und der Astroide hervorgehen. Einer von den ∞^1 Kulminationspunkten der gemeinen Zykloide wird bei der Verbiegung zum Scheitel der Geodätischen. Man erkennt, daß der Scheitel die Geodätische in zwei symmetrische Teile zerlegt. Diejenigen Erzeugenden des Kegels, die durch die singulären Punkte der Geodätischen gehen, werden scharfe Grate der Fläche sein. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Graten der Fläche erhebt sie sich in Gestalt einer Wölbung, und die Kulminationspunkte, somit auch der Scheitel, liegen auf diesen Wölbungen und zwar auf Erzeugenden des Kegels, die mit den zwei begrenzenden Graten gleiche Winkel bilden. Im Scheitel berührt nun die ausgezeichnete Asymptotenlinie der Binormalenfläche die geodätische Linie, überspringt dann in ihrem weiteren Verlaufe die tiefer liegenden Grate und berührt den Kegel wieder in den höchsten Erhebungen der nächstfolgenden Wölbungen, wiederum Punkte der Geodätischen. Mithin gilt:

Die geodätischen Linien des Kegels, die durch Biegung mit geradlinig bleibenden Tangenten aus der gemeinen Zykloide hervorgehen, werden von einer Asymptotenlinie ihrer Binormalenfläche in ∞^1 Punkten berührt.

---

1) Schauff, Über die geodätischen Linien des Kegels. Diss. Münster 1906.

Schon früher hatten wir erwähnt, daß bei der Astroide die Verbiegung mit einem Aufrollen verbunden ist und zwar so, daß die Astroide eine ähnliche Gestalt wie die gemeine Zykloide annimmt. Hier gilt dasselbe wie bei der gemeinen Zykloide. Der Kegel weist längs der Erzeugenden durch die singulären Punkte scharfe Grate auf; dazwischen erheben sich Wölbungen, auf deren Mitte der Scheitel und die ∞^1 Kulminationspunkte der geodätischen Linie liegen, Punkte, in denen die Haupttangentenkurve die geodätische Linie berührt:

Die geodätischen Linien des Kegels, die durch Biegung mit geradlinig bleibenden Tangenten aus der Astroide hervorgehen, werden von einer Asymptotenlinie ihrer Binormalenfläche in ∞^1 Punkten berührt.

Den regulären Verlauf zeigen noch die Kegelgeodätischen, die aus dem elliptischen Fall I und II hervorgehen. Der Kegel weist bei Fall I auch scharfe Grate auf, die wiederum durch die singulären Punkte der Geodätischen gehen. Ebenso berührt die ausgezeichnete Haupttangentenkurve der Binormalenfläche die Geodätische in ∞^1 Punkten. In den Berührungspunkten durchdringt diese Asymptotenlinie den Kegel, der sich nach zwei Seiten der Haupttangentenkurve jedesmal bis zu einem scharfen Grat erstreckt. Die Kegelgeodätischen, die aus Fall II durch Verbiegung und Aufrollen entstehen, zeigen Doppelpunkte und werden von der ausgezeichneten Asymptotenlinie in ∞^1 Punkten berührt.

Bei den anderen Geodätischen tritt jedoch ein abweichender Verlauf ein, und zwar besteht er bei den Geodätischen, die aus der Neilschen Parabel und der Evolute der Kettenlinie entstehen, darin, daß der Scheitel fehlt und die Raumkurve nur einen Ast besitzt. Es darf wohl noch der Satz bemerkt werden:

Die aus den Evoluten der Kettenlinie und der Neilschen Parabel durch Biegung mit geradlinig

bleibenden Tangenten entstehenden geodätischen Linien des Kegels besitzen nur einen Ast, dessen Anfangspunkt nicht in den Scheitel fällt.

§ 6. Zwei Spezialfälle von Evoluten Ribaucourscher Kurven.

Da die Ribaucourschen Kurven ein besonderes Interesse beanspruchen, so mögen in diesem Abschnitt noch 2 weitere Spezialfälle von ihren Evoluten, die auf elliptische Funktionen führen, behandelt werden.

I.

Man setze in der allgemeinen Gleichung [(4) S. 33] $k = -1$. Die natürliche Gleichung dieser Kurvenschar lautet:

$$R^2 = \frac{1}{4A^2} s^6 - \frac{1}{4} s^2$$

und die kartesischen Koordinaten ihrer Punkte werden:

$$(1.) \qquad x = \int \frac{s^2 \, ds}{\sqrt{s^4 - A^2}} - A^2 \int \frac{ds}{s^2 \cdot \sqrt{s^4 - A^2}}$$

$$y = \frac{A}{s}.$$

Mit der Substitution

$$s^2 = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$ds = \frac{\sqrt{A} \cdot t \, dt}{(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und der Abkürzung

$$S = \sqrt{s^4 - A^2}$$

$$T = \sqrt{(1 - t^2)\left(1 - \frac{1}{2} t^2\right)}$$

ergeben sich unter Benutzung der Gleichungen:

$$\int \frac{s^2\,ds}{S} = \frac{\sqrt{A}}{2} \int \frac{dt}{(1-t^2)\,T}. \tag{2.}$$

$$\int \frac{ds}{s^2 \cdot S} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot A^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\int \frac{dt}{T} - \int \frac{t^2\,dt}{T} \right] \tag{3.}$$

die kartesischen Koordinaten der Kurven in der Form:

$$x = \sqrt{\frac{A}{2}} \left[\int \frac{dt}{(1-t^2)\,T} - \int \frac{dt}{T} + \int \frac{t^2\,dt}{T} \right] \tag{4.}$$

$$y = \sqrt{A}\ \sqrt{1-t^2}.$$

Da der Parameter des Normalintegrals dritter Gattung $n = -1$ ist, so läßt es sich zurückführen auf die Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Es ist

$$\int \frac{dt}{(1-t^2)\,T} = \frac{2t \cdot T}{1-t^2} - \int \frac{dt}{T} + \int \frac{t^2\,dt}{T}.$$

Man erhält somit die Gleichungen:

$$x = -2\sqrt{\frac{A}{2}} \left[\int_0^t \frac{dt}{T} - \int_0^t \frac{t^2\,dt}{T} - \frac{t \cdot T}{1-t^2} \right] \tag{5.}$$

$$y = \sqrt{A} \cdot \sqrt{1-t^2}.$$

Wir führen nun die Jacobischen Funktionen ein und beachten dabei die Relation [1])

$$\int_0^u sn^2\,u\,du = 2\,\frac{d^2 ln\,\vartheta_0(v)_0}{du^2} \cdot u - 2\,\frac{d\,ln\,\vartheta_0(v)}{du},$$

1) Krause, Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig und Berlin 1912, Seite 106.

wo $v = u \cdot \frac{1}{\pi \vartheta_3^2(o)}$ ist, und der Index Null an v in der Größe $\frac{d^2 ln \vartheta_0(v)_0}{du^2}$ andeuten soll, daß das Argument v für den Wert Null zu nehmen ist; alsdann ergibt sich:

$$x = \left[4\sqrt{\frac{A}{2}}\frac{d^2 ln \vartheta_0(v)_0}{du^2} - 2\sqrt{\frac{A}{2}}\right]u - 4\sqrt{\frac{A}{2}}\frac{d ln \vartheta_0(v)}{du}$$

$$+ 2\sqrt{\frac{A}{2}} \cdot \frac{snu \cdot dnu}{cnu} \tag{6.}$$

$$y = \sqrt{A} \cdot cnu.$$

Weiter bilde man

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{\frac{A}{2}}\left[-2 + sn^2u + 2\,dn^2u + 2\,\frac{sn^2u \cdot dn^2u}{cn^2u}\right]$$

$$\frac{dy}{du} = -\sqrt{A} \cdot snu \cdot dnu. \tag{7.}$$

Die Kurve kann nur für reelles A und reelle Werte des Arguments reelle Punkte haben. Außerdem genügt es, die Kurve innerhalb des Intervalls von $u = o$ bis $u = K$, wo $4K$ die reelle Periode sein soll, zu betrachten; mit dem hierbei erhaltenen Ast der Kurve sind alle anderen Äste kongruent. Innerhalb des angegebenen Intervalls existiert nur ein singulärer Punkt für $u = 0$. Für diesen Wert wird $x = 0$, während y seinen größten Wert $\sqrt{\frac{A}{2}}$ erreicht. In diesem Wertbereich hat $\frac{dy}{dx}$ immer negatives Vorzeichen. Der Winkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet, ist stumpf, bis er bei $u = K$ gleich $2R$ wird. Die Kurve fällt von dem Punkte $u = 0$ beständig gegen die x-Achse und nähert sich dieser Achse asymptotisch. Für negative Werte des Arguments u bleibt y

positiv, dagegen nimmt x das entgegengesetzte Vorzeichen an. Die Kurve liegt symmetrisch zur y-Achse.

Figur (III) stellt die Kurve dar.

II.

Einen weiteren elliptischen Fall erhält man, wenn man in der Gleichung [(4) S. 33] $k = -\frac{1}{2}$ setzt. Die natürliche Gleichung dieser Kurvenschar lautet:

$$R^2 = \frac{4}{9\,A^2}\,s^5 - \frac{4}{9}\,s^2,$$

und die kartesischen Koordinaten werden

$$(1.)\qquad x = \int \frac{s^2\,ds}{\sqrt{s^4 - \frac{A^2}{4}\,s}} - \frac{A^2}{4}\int \frac{ds}{s\cdot\sqrt{s^4 - \frac{A^2}{4}\,s}}$$

$$y = A\,s^{-\frac{1}{2}}.$$

Die x-Koordinate läßt sich in der Form darstellen:

$$x = \int \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{4}\cdot\frac{1}{s^3}}} - \frac{A^2}{4}\int \frac{ds}{s\cdot\sqrt{1 - \frac{A^2}{4}\cdot\frac{1}{s^3}}}.$$

Durch die Substitution

$$s = -\sqrt[3]{\frac{A^2}{16}}\cdot\frac{1}{t},\quad ds = \sqrt[3]{\frac{A^2}{16}}\,\frac{dt}{t^2}.$$

wandeln sich die Gleichungen (1) um in:

$$(2.)\qquad x = \sqrt[3]{\frac{A^2}{2}}\left\{\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\cdot\sqrt{4\,t^3+1}} + 2\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4\,t^3+1}}\right\}$$

$$y = \left(2\sqrt[3]{2\,A^4}\right)^{\frac{1}{2}}(-t)^{\frac{1}{2}}.$$

Beachtet man die Relation:

$$\int \frac{dt}{t^2 \cdot \sqrt{4t^3+1}} = 2\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4t^3+1}} - \frac{1}{t}\cdot\sqrt{4t^3+1},$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$(3.)\qquad x = \sqrt[3]{\frac{A^2}{2}}\left\{3\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4t^3+1}} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4t^3+1}}{t}\right\}$$

$$y = \left(2\sqrt[3]{2A^4}\right)^{\frac{1}{2}}\,(-t)^{\frac{1}{2}}.$$

Führt man die Weierstraßsche $\wp$-Funktion mittest $t = \wp v$ ein, so wird:

$$(4.)\qquad x = \sqrt[3]{\frac{A^2}{2}}\cdot\left\{3\zeta v - \frac{1}{2}\frac{\overline{\wp}'v}{\overline{\wp}v}\right\}$$

$$y = \left(2\sqrt[3]{2A^4}\right)^{\frac{1}{2}}\,(-\overline{\wp}v)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese $\wp$-Funktion hat wieder konjugiert komplexe Perioden. Wendet man die Substitution[1]) an:

$$\overline{\wp}v = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}\cdot\frac{1+cn\,2u}{1-cn\,2u}$$

$$\overline{\wp}'v = -2\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}}$$

$$\cdot\frac{sn\,2u\cdot dn\,2u}{(1-cn\,2u)^2},$$

wo gesetzt ist

$$u = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}}\cdot v.$$

---

1) Krause, Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1912, Seite 151.

Dadurch erhält man als endgültige Gleichungen:

$$=\sqrt[3]{\frac{A^2}{2}}\cdot\left\{3\zeta\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}}}\right)+\frac{\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}}}{1-cn\,2u}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{sn\,2u\cdot dn\,2u}{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)cn\,2u}\right\}$$

$$=\left(2\sqrt[3]{2A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)cn\,2u}{1-cn\,2u}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Kurve ist reell für Werte von u, für die die Relation besteht:

$$(6.)\qquad -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}\geqq cn\,2u,$$

d. h. das Argument $2u$ darf nur gewisse Werte annehmen in dem Intervall von K bis 3 K. Für den Wert (6) wird $y=0$ und $x=-\infty$. Gibt man nun $2u$ immer größere Werte, so wird x größer, während auch y wächst. Den größten Wert erhält y für $2u=2K$. In dem entsprechenden Punkt wird $\frac{dy}{du}=0$. Zieht man die Gleichung $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}A\frac{1}{\sqrt{s^3-\frac{A^2}{4}}}$ zu Rate, so erkennt man, daß auch $\frac{dx}{du}=0$ wird. Diesem Werte $u=K$ entspricht eine Spitze. Sie liegt schon auf der positiven Seite der x-Achse. Wird das Argument $2u$

noch größer, so wächst x weiter, dagegen nimmt y die früheren Werte wieder an. Erreicht $cn\,2u$ wiederum den Wert (6), so wird $x = \infty$ und $y = 0$. Jedoch ist dieser Zweig nicht dem früheren kongruent. Figur (IV) zeigt die Kurve.

Zum Schluß erlaube ich mir, Herrn Professor Dr. E. Salkowski in Berlin sowie meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer, für die freundliche Anregung zu diesen Untersuchungen und die liebenswürdige Förderung bei ihrer Ausführung meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Friedrich Otto Weber, am 15. August 1888 zu Albersroda, Kreis Querfurt, als Sohn des damaligen Gastwirts Friedrich Weber. Von Ostern 1894 bis Ostern 1899 besuchte ich die Landschule meines Geburtsortes, von da an die Realschule zu Naumburg a. S., die ich Ostern 1902 mit dem dortigen Realgymnasium vertauschte. Dasselbe verließ ich Michaelis 1909 mit dem Zeugnis der Reife. Inzwischen gab mein Vater sein Geschäft auf und lebt jetzt als Privatmann in Egeln, Kreis Wanzleben. Ich widmete mich dann dem Studium der Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie, und zwar von Michaelis 1909 bis Michaelis 1911 in München, seitdem in Halle. Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 17. Dezember 1913.

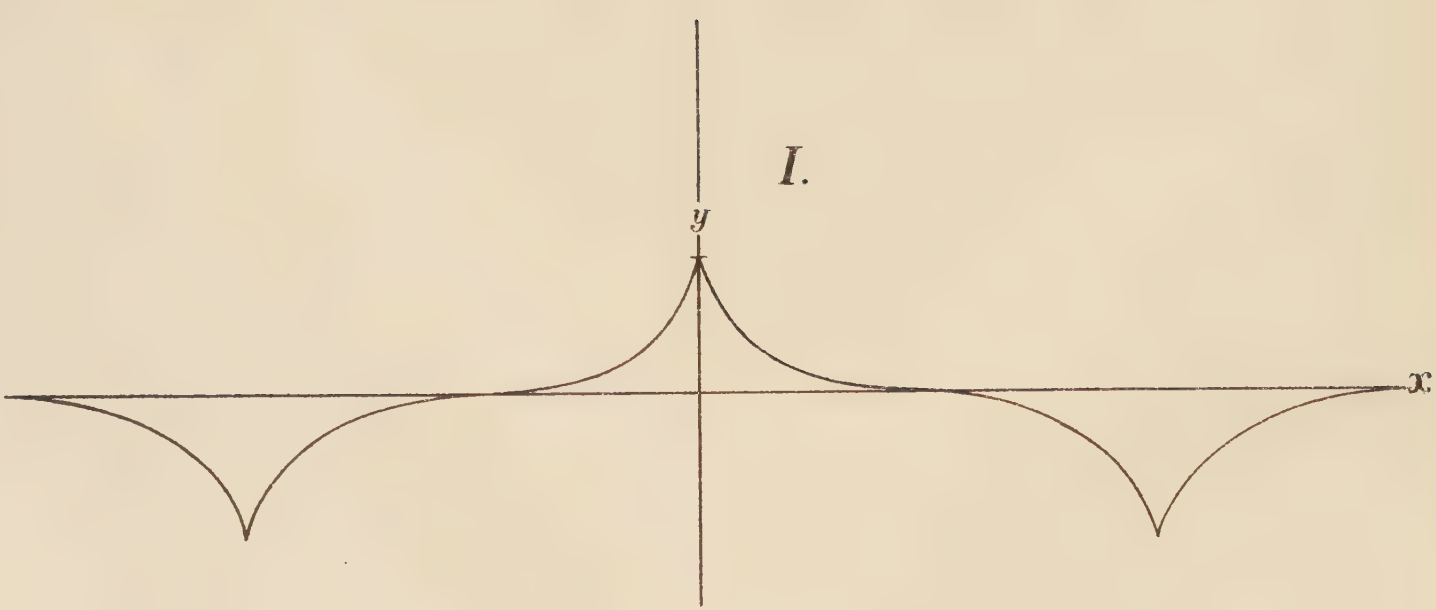
Meine Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten in München:

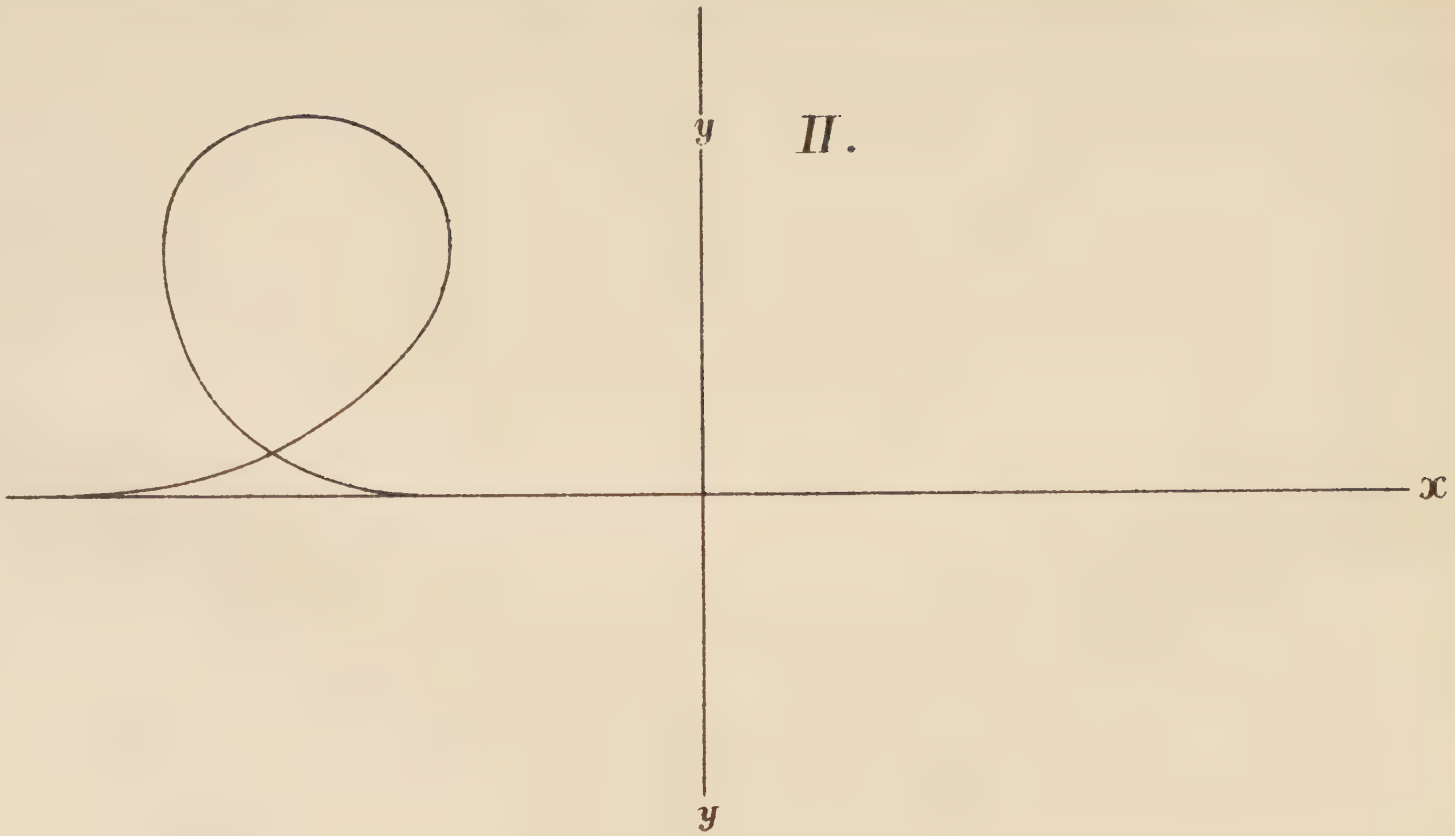
v. Baeyer, Birkner, v. Bissing, Dieckmann, Doehlemann, Graetz, Hartogs, Laue, Lindemann, Pringsheim, v. Röntgen, v. Seeliger, Voß, Wagner;

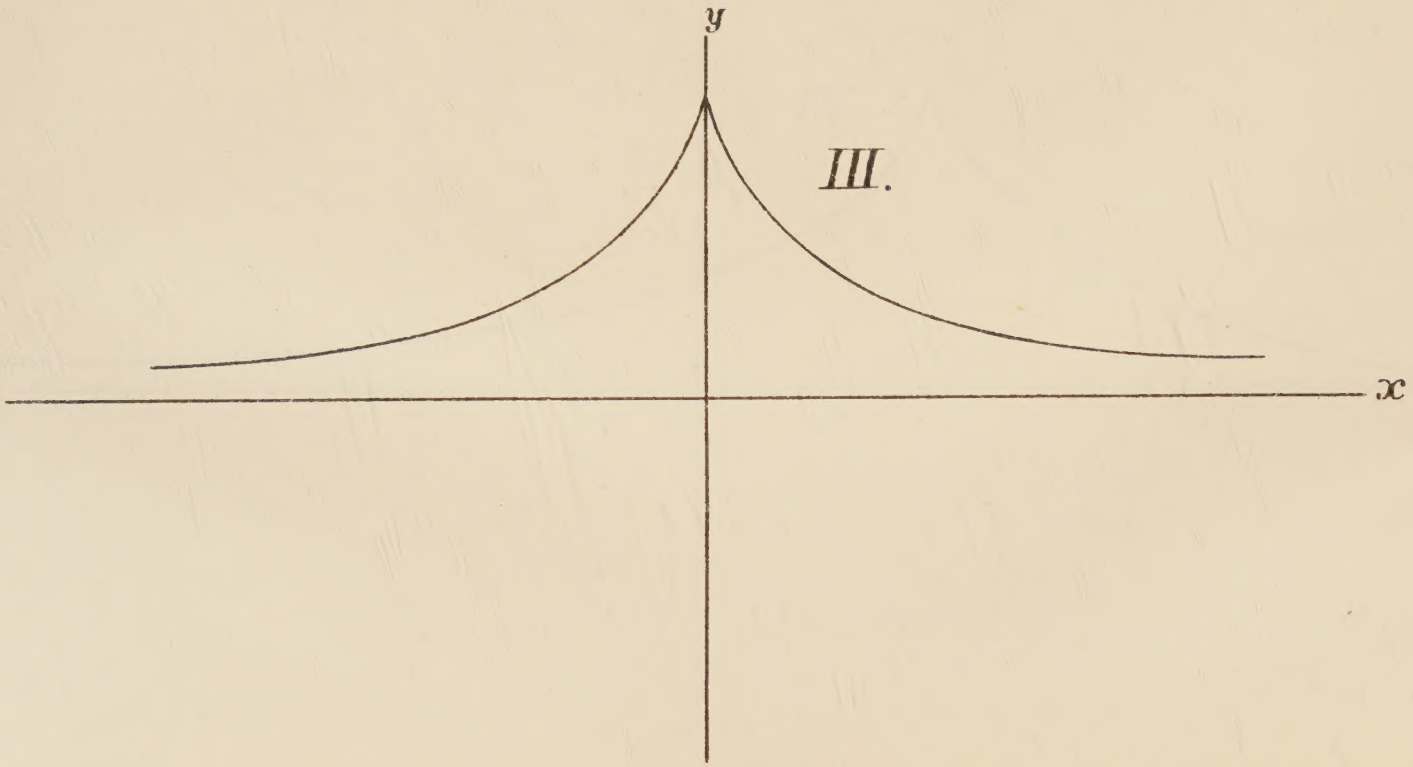
in Halle:

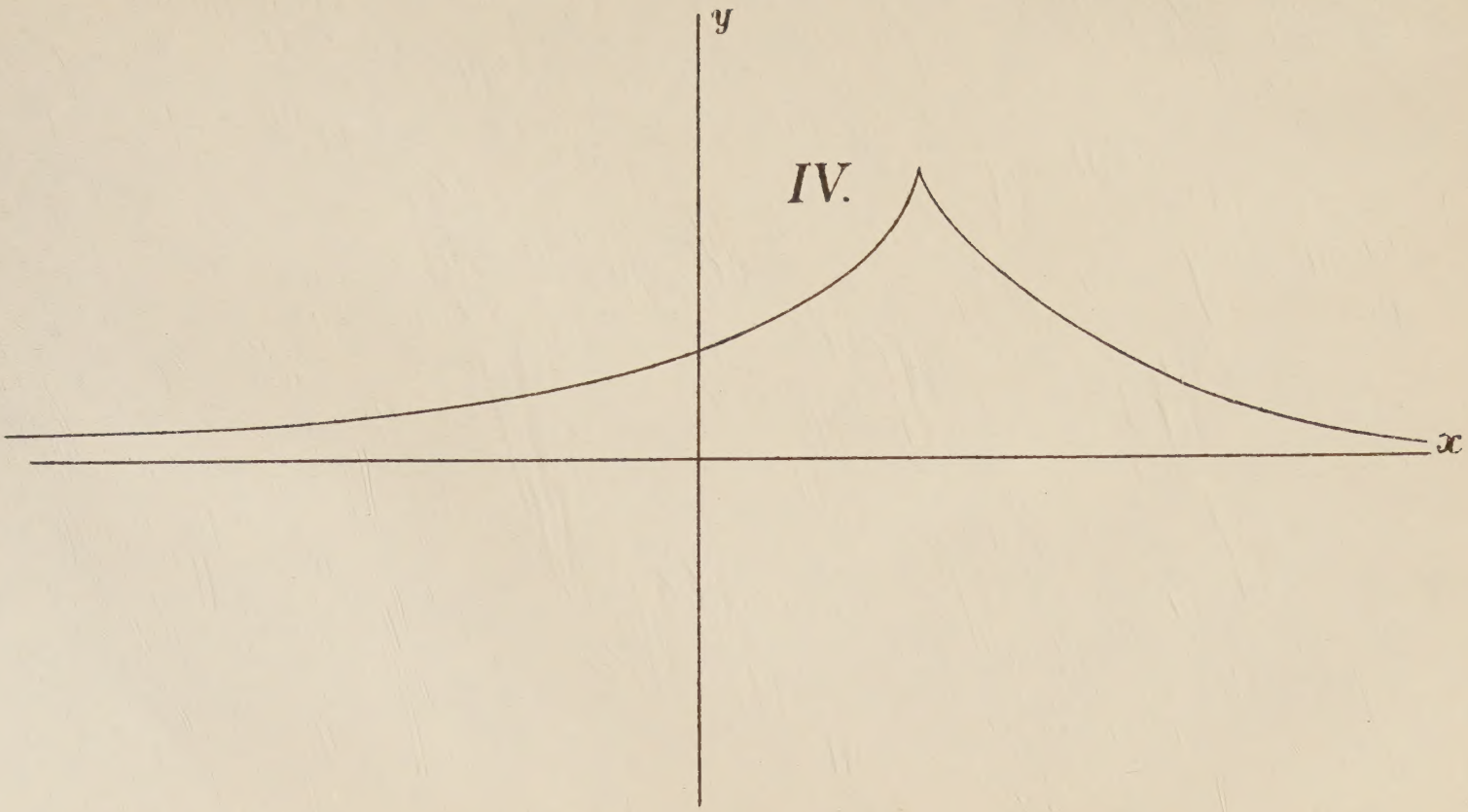
Gutzmer, Boeke, Dorn, Fries, Jaensch, Krüger, Menzer, Schmidt, Tubandt, Vorländer, Wangerin.

Alle meine hochverehrten Lehrer mögen meines dauernden Dankes gewiß sein.


I.
y
x


y
II.
x
y


y
III.
x


y
IV.
x